

Mathematik 2 für BT / UV
 FB MuV, HS Furtwangen University
 Dr. Stefan von Weber
 Version 10/2011 (Skript 1404)

11	Matrizen (Darstellung, Rechnen mit Matrizen und Vektoren, Drehmatrix), lineare Gleichungssysteme (Eliminationsverfahren GAUSS oder GAUSS-JORDAN, inverse Matrix, über- und unterbestimmte Systeme), Determinanten (Rang einer Matrix, SARRUSsche Regel, CRAMERsche Regel), Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix	Matrices, Matrix calculus, systems of linear equations, solving by elimination methods, inverse matrix, determinants, rank, rules of SARRUS and CRAMER, eigenvalues
12	Funktionen mehrerer Veränderlicher (graphische Darstellung, skalare und Vektorfelder), partielle Ableitung , Differenzial, Gradient, Kettenregeln	Functions with two and more arguments, partial derivative, gradient
13	Mehrfache Integrale , konstante Grenzen, Produktzerlegung, Koordinatensysteme, Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten, Trägheitsmomente, variable Grenzen)	Multiple Integrals, constant boundaries, coordinate systems, cylindrical, spherical, moments of inertia, variable boundaries
14	Differenzialgleichungen (Klassifikation, Anfangswerte bzw. Randbedingungen, Trennung der Veränderlichen, Variation der Konstanten, DGL mit konstanten Koeffizienten, e-Ansatz, homogene, inhomogene DGL, charakteristische Gleichung, inhomogener Lösungen), Systeme linearer DGL, Laplace-Transformation (DGL, Korrespondenztabelle, Partialbruchzerlegung)	Differential equations, initial values, boundary values, separation of variables, variation of constants, constant coefficients, characteristic equation, systems of linear ODEs, LAPLACE transformation, partial fraction
15	Fourier-Analyse (Fourier-Reihe, reell, komplex, beliebige Periode, punktweise Funktion) Wellen (zeitliche und räumliche Ausbreitung von Wellen, Amplitude, Frequenz, Phase)	Fourier analysis, Fourier series, discrete values, waves, temporal and spatial propagation, frequency
16	Übungsaufgaben	Exercises
17	Übungsklausur	Written exam example
18	Deutsch-Englisch Wörter der Mathematik	Dictionary German-English

11. Matrizen (Vektoren, Matrizen, lineare Gleichungssysteme)

11.1 Einführung

Eine Einführung in die Vektorrechnung erfolgte bereits in Mathe1.

Als **n-Vektor** bezeichnet man die Form $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Statt \vec{a}^T wird auch oft nur \vec{a}' geschrieben. Beispiel eines 3-dimensionalen Vektors, z.B. eine

Beschleunigung im Raum, ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -2.4 \\ 1.7 \end{pmatrix}$

Eine **(m,n)-Matrix** hat m Zeilen und n Spalten, z.B. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

z.B. eine (2,3)-Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Eine **Spaltenmatrix** hat nur eine Spalte, eine **Zeilenmatrix** nur eine Zeile, z.B.

(m,1)-Spaltenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ oder (1,n)-Zeilenmatrix $A = (a_{11} \dots a_{1n})$.

Quadratische Matrizen haben gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten, z.B. eine (n,n)-Matrix. Dreiecksmatrizen, Diagonalmatrizen und Einheitsmatrizen sind immer quadratisch.

Bei **Dreiecksmatrizen** ist eine Hälfte über oder unter der Diagonalen mit Nullen belegt,

wie z.B. bei der oberen (n,n)-Dreiecksmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Eine **Diagonalmatrix** ist außerhalb der Diagonalen mit Nullen belegt, wie z.B. die

(n,n)-Diagonalmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Eine **Einheitsmatrix** ist eine Diagonalmatrix mit der Diagonale 1, z.B. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Eine **Nullmatrix** ist eine beliebige (m,n)-Matrix aus Nullen, z.B. $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Symmetrische und antisymmetrische Matrizen sind wieder quadratische Matrizen. Bei symmetrischen Matrizen gilt $A = A^T$, d.h. Matrix A ist gleich ihrer **Transponierten** (Zeilen und Spalten vertauscht).

Bei antisymmetrischen Matrizen gilt $A = -A^T$, d.h. Matrix A ist gleich ihrer negativen Transponierten (Zeilen und Spalten vertauscht). Hier ist die Diagonale zwangsweise Null.

Beispiel symmetrisch $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 3 & -2 \\ 9 & 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, antisymmetrisch $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & -4 & -7 \\ -3 & 4 & 0 & 2 \\ 9 & 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Satz: Jede quadratische Matrix ist zerlegbar in die Summe aus einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix.

Es gilt $A = A_s + A_{as}$ mit $A_s = 0.5 * (A + A^T)$ und $A_{as} = 0.5 * (A - A^T)$.

Jede beliebige Matrix lässt sich transponieren, d.h. Zeilen und Spalten vertauschen. Dabei wird aus einer (m,n)-Matrix eine (n,m)-Matrix.

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 9 & 2 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ wird zu $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & 0 & 7 \\ 1 & 9 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Orthogonale Matrizen bestehen aus Zeilenvektoren, die im n-dimensionalen Raum jeweils senkrecht aufeinander stehen. Sie sind immer quadratisch. Für orthogonale Matrizen gilt $A A^T = A^T A = D$ (Matrix mal Transponierte ergibt Diagonalmatrix).

Sind die Zeilenvektoren auf Norm 1 normiert, spricht man von orthonormalen Matrizen. Hier gilt $A A^T = A^T A = E$

Inverse Matrizen A^{-1} sind aufwendig zu berechnen, vergleichbar der Lösung eines Gleichungssystems. Wir berechnen Sie nur für quadratische Matrizen.

Es gilt $A A^{-1} = E = A^{-1} A$, d.h. Matrix mal Inverse ergibt die Einheitsmatrix.

11.2 Rechnen mit Matrizen und Vektoren

Multiplikation mit einem Skalar: Jedes Element wird multipliziert.

$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$ z.B. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$ mal 3 gibt $3A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 27 & 18 \end{pmatrix}$

Addition und Subtraktion ist nur möglich, wenn beide Matrizen gleiche Zeilenzahl und gleiche Spaltenzahl haben. Es werden immer die gleich indizierten Elemente addiert bzw. subtrahiert.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{z.B.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Multiplikation Matrix mal Vektor: Hier ist eine Verkettung nötig. Liegt eine (m,n)-Matrix vor, dann kann diese nur mit einem n-Vektor multipliziert werden. Es entsteht als Ergebnis ein m-Vektor. Das i-te Element des m-Ergebnisvektors ist das Skalarprodukt der i-ten Matrixzeile mit dem n-Vektor.

$$A \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{z.B.} \quad \begin{pmatrix} 8 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 4 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ 6 \cdot 4 - 0 \cdot 1 + 9 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 51 \end{pmatrix}$$

Multiplikation Matrix mal Matrix: Hier ist wieder eine Verkettung nötig. Liegt eine (m,n)-Matrix vor, kann sie nur mit einer (n,p)-Matrix multipliziert werden. Das Ergebnis ist eine (m,p)-Matrix. Das Skalarprodukt aus i-ter Zeile der (m,n)-Matrix und j-ter Spalte der (n,p)-Matrix ergibt das Element (i,j) der (m,p)-Ergebnismatrix.

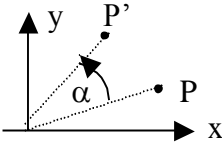
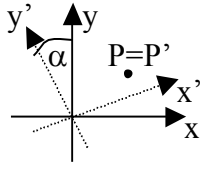
Beispiel: (2,3)-Matrix * (3,3)-Matrix = (2,3)-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 9 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 38 & -14 \\ 92 & -3 & 64 \end{pmatrix}$$

Drehmatrix als Beispiel einer Matrixanwendung. Die folgende Matrix dreht einen Punkt P von seiner Position in die neue Position P'. Die Drehachse ist hier die z-Achse. Der Drehwinkel sei α . Die z-Koordinate des Punktes wird bei dieser Drehung nicht geändert.

$$D_z = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{z.B. bei } \alpha=30^\circ \quad \text{ist} \quad D_z = \begin{pmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

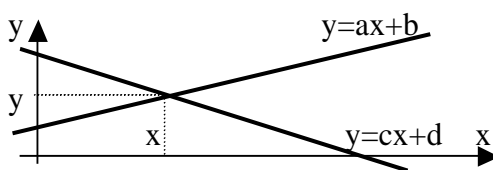
$$\text{Mit } \vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{wird} \quad \vec{P}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = D_z \vec{P} = \begin{pmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.665 \\ 2.116 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Drehung des Punktes erfolgt in die vorzeichenrichtige mathematische Drehrichtung gemäß dem Winkel, z.B. +30°	Will man dagegen das Koordinatensystem drehen, d.h. neue Achsen x' und y' einführen, dann entspricht das der entgegengesetzten Drehung, z.B. -30°. Der Punkt bleibt am alten Ort, hat aber neue Koordinaten (x', y')
	

D_x und D_y sind die Drehmatrizen mit der Drehachse x bzw. Drehachse y:

$$D_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad D_y = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

11.3 Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe sei es, den Schnittpunkt (x,y) zweier Gerader zu berechnen. Wir haben zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten: $y = a x + b$ $y = c x + d$	
--	--

Wir schreiben die Gleichungen in 2 Schritten um in Richtung Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} -a x + 1 \cdot y &= b \\ -c x + 1 \cdot y &= d \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad A \vec{x} = \vec{b}$$

- A ist die Matrix der Koeffizienten
- \vec{x} ist der Lösungsvektor (hier im Beispiel (x, y))
- \vec{b} ist der Vektor der Rechten Seite (hier im Beispiel (b, d))

Zur Erinnerung

Eine gültige Gleichung bleibt eine gültige Gleichung, auch wenn man

- linke und rechte Seite mit derselben Größe multipliziert oder dividiert
- zur linken und rechten Seite dieselbe Größe addiert oder subtrahiert
- ein beliebig Vielfaches anderer Gleichungen addiert oder subtrahiert

Beispiele

$$a x + b y = c \quad \text{mit } 4 \text{ multipliziert gibt} \quad 4 a x + 4 b y = 4 c$$

$$\begin{aligned} a x + b y &= c \\ d x + e y &= f \end{aligned} \quad \text{ergeben addiert die neue Gleichung} \quad (a+d) x + (b+e) y = (c+f)$$

11.3.1 Gauß-Jordan-Eliminationsverfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A \vec{x} = \vec{b}$

Durch Multiplikation mit bestimmten Zahlen sowie Addition bzw. Subtraktion von Zeilen wandelt man die ursprüngliche Koeffizientenmatrix A in die Einheitsmatrix E um.

Der Vektor \vec{b} der Rechten Seite wird mitgewandelt und wird zur Lösung \vec{x} , denn es gilt ja

$$E \vec{x} = \vec{x}$$

Zahlenbeispiel zur Gauß-Jordan-Elimination: Gegeben sind drei Gleichungen mit 3 Unbekannten

$$\begin{aligned} 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 &= 13 \\ 2x_1 - 6x_2 &= -10 \end{aligned}$$

Im ersten Umrechnungsschritt werden in der ersten Matrixspalte unter dem Pivotelement [6] zwei Nullen erzeugt, indem die 1. Gleichung (1. Gl.) mit einem geeigneten Faktor multipliziert von der 2. Gl. und der 3. Gl. subtrahiert wird. Die Faktoren *Fak* ergeben sich auf simple Weise aus Matrixelement / Pivot, wobei das Matrixelement dasjenige unter dem oder über dem Pivotelement ist, das gerade zu Null gemacht werden soll. Zuletzt wird die Pivotzeile durch das Pivotelement geteilt, damit auf der Diagonalen eine 1 entsteht. Die durchzuführenden Aktionen sind rechts neben dem Gleichungssystem noch einmal in Kurzform notiert.

$$\begin{pmatrix} [6] & -12 & 6 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 3.) \quad 1. Gl. := 1. Gl. / 6 \\ 1.) \quad Fak = 3/6; \quad 2. Gl. := 2. Gl. - Fak \cdot 1. Gl. \\ 2.) \quad Fak = 2/6; \quad 3. Gl := 3. Gl. - Fak \cdot 1. Gl. \end{array}$$

Das Ergebnis des ersten Umrechnungsschrittes ist eine neue Matrix und eine neue Rechte Seite

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Der zweite Umrechnungsschritt soll in der zweiten Matrixspalte zwei Nullen und in der Diagonalen eine 1 erzeugen. (Die 1 steht zufällig schon da.). Pivotelement ist die [1].

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & [1] & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 1.) \quad Fak = -2/1; \quad 1. Gl := 1. Gl - Fak \cdot 2. Gl \\ 3.) \quad 2. Gl := 2. Gl / 1 \\ 2.) \quad Fak = -2/1; \quad 3. Gl := 3. Gl - Fak \cdot 2. Gl \end{array}$$

Das Resultat des zweiten Schrittes und die Aktionen für den 3. Schritt sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & [2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 1.) \quad Fak = 5/2; \quad 1.Gl := 1.Gl - Fak \cdot 3.Gl \\ 2.) \quad Fak = 2/2; \quad 2.Gl := 2.Gl - Fak \cdot 3.Gl \\ 3.) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 3.Gl := 3.Gl / 2 \end{array}$$

Als Resultat des 3. Umrechnungsschrittes entsteht die Einheitsmatrix und die Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , d.h. \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \quad \text{und} \quad x_3 = 4$$

Probe

Um nicht eigenen Rechenfehlern aufzufliegen, macht man entweder die Probe mit *allen* Gleichungen, was das sicherste ist, oder

- bei Gauß-Jordan immer mit der ersten Gleichung
- beim Gauß-Eliminationsverfahren immer mit der letzten Gleichung

Wir machen demnach die Probe mit der ersten Gleichung $6 \cdot 1 - 12 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 6$

11.3.2 Berechnung der Inversen A^{-1}

Inverse Matrizen werden oft in der Technik oder Statistik verwendet. Die inverse Matrix kann man z.B. so berechnen, indem man die folgenden n Gleichungssysteme löst. Sie unterscheiden sich nur durch die Stellung der 1 im Vektor der Rechten Seite:

$$A \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad A \vec{x}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die n Lösungsvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ sind die Spalten der inversen Matrix A^{-1}

Da der erste Lösungsvektor die erste Spalte der inversen Matrix wird, bezeichnen wir seine Elemente mit $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$, die vom zweiten Lösungsvektor mit $x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}$, usw.

Kleines Zahlenbeispiel mit einer (2,2)-Matrix, d.h. n=2.

Wir lösen die kleinen Gleichungssysteme nicht mit Gauß-Jordan, sondern mit dem Gauß-Eliminations-Verfahren. Das erste der beiden Gleichungssysteme ist:

$$\begin{pmatrix} [3] & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Fak = 2/3; \quad 2.Gl := 2.Gl - Fak \cdot 1.Gl$$

wir erhalten eine Dreiecksmatrix und können damit x_{21} und dann x_{11} berechnen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4.333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.667 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Gleichung gibt } 0 \cdot x_{11} + 4.333 \cdot x_{21} = -0.667 \Rightarrow x_{21} = \frac{-0.667}{4.333} = -0.1539$$

$$1. \text{ Gleichung gibt } 3 \cdot x_{11} + 1 \cdot (-0.1539) = 1 \Rightarrow x_{11} = \frac{1 + 0.1539}{3} = 0.3846$$

Das zweite der beiden Gleichungssysteme ist:

$$\begin{pmatrix} [3] & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Fak = 2/3; \quad 2.Gl := 2.Gl - Fak \cdot 1.Gl$$

Wir erhalten wieder dieselbe Dreiecksmatrix und können damit x_{22} und dann x_{12} berechnen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4.333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Gleichung gibt } 0 \cdot x_{12} + 4.333 \cdot x_{22} = 1 \Rightarrow x_{22} = \frac{1}{4.333} = 0.2308$$

$$1. \text{ Gleichung gibt } 3 \cdot x_{12} + 1 \cdot (0.2308) = 0 \Rightarrow x_{12} = \frac{-0.2308}{3} = -0.0769$$

Damit ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3846 & -0.0769 \\ -0.1539 & 0.2308 \end{pmatrix}$ die gesuchte inverse Matrix.

Wir machen die Probe mit der Gleichung $A^{-1} \cdot A = E$, d.h. bei Multiplikation der Inversen mit der Originalmatrix nach den Regeln der Matrixmultiplikation muss die Einheitsmatrix entstehen (bis auf Rundungsfehler):

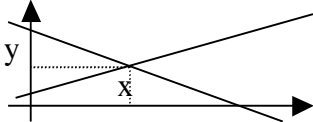
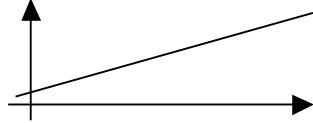
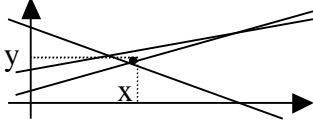
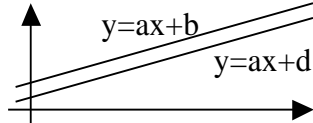
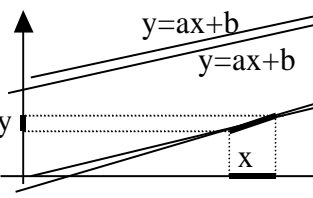
$$\begin{pmatrix} 0.3846 & -0.0769 \\ -0.1539 & 0.2308 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hat man viele Gleichungssysteme mit derselben Matrix A , aber unterschiedlichen Rechten Seiten \vec{b} zu lösen, dann berechnet man einmalig die inverse Matrix A^{-1} . Die Lösung eines der vielen Gleichungssysteme ist dann nur noch die relativ schnelle Operation „Matrix mal Vektor“, denn es gilt:

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

Genau diese Aufgabenkonstellation findet man beim Glätten von Messkurven mit dem Verfahren der „gleitenden Polynome“ vor, denn da muss für jeden neuen Messwert ein Gleichungssystem gelöst werden.

11.3.3 Tücken beim Lösen linearer Gleichungssysteme

	<p>Reguläres Gleichungssystem: 2 Gleichungen (Geraden), 2 Unbekannte x und y, es existiert eine eindeutige Lösung (der Schnittpunkt)</p>
	<p>Unterbestimmtes Gleichungssystem (nicht lösbar): 2 Unbekannte x und y, aber nur eine Gleichung (Gerade). Es existieren unendlich viele potentielle Lösungen, denn jeder Punkt der Geraden könnte zum Schnittpunkt werden</p>
	<p>Überbestimmtes Gleichungssystem (gut lösbar): Man hat mehr Gleichungen als Unbekannte (hier 3 Geraden). Es existiert eine eindeutige Lösung (der Schnittpunkt) nach der <i>Methode der kleinsten Quadrate</i>.</p>
	<p>Widersprüchliches Gleichungssystem (nicht lösbar): In der Matrix entsteht bei den Eliminationsschritten eine Nullzeile. (Graphisch sind es parallele Geraden oder Ebenen, die das verursachen). Kein Schnittpunkt</p>
	<p>Singuläres Gleichungssystem (nicht oder ungenau lösbar) Entweder liegen linear abhängige Zeilen vor (z.B. zwei identische Gleichungen). In der Matrix entsteht eine Nullzeile. Oder fast linear abhängige Zeilen (z.B. zwei fast identische Gleichungen). Es entsteht in der Matrix eine Fast-Nullzeile, die auf ungenaue Lösungen führt.</p>

Merksatz: *Lässt sich ein Gleichungssystem nicht lösen, dann ist in 99,9% der Fälle schon die Aufgabenstellung oder die zu Grunde liegende Konstruktion falsch. Suchen Sie dort den Fehler!*

Lineare Abhängigkeit einer Matrixzeile liegt vor, wenn sich diese als **Linearkombination** aus anderen Zeilen darstellen lässt. Im folgenden Beispiel lässt sich z.B. die 3. Zeile durch eine Linearkombination aus der 1. und 2. Zeile der Matrix darstellen.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 5 & -4 & -3 \\ -6 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad 3. \text{ Zeile} = 0,5 \cdot 1. \text{ Zeile} - 1,5 \cdot 2. \text{ Zeile}$$

Eine Matrix heißt **singulär**, wenn sie linear abhängige Zeilen enthält.

Eine Matrix heißt **quasisingulär**, wenn sie fast linear abhängige Zeilen enthält.

Merksatz: *Singuläre oder quasisinguläre Matrizen sind die Folge einer falschen oder überfrachteten Problemstellung. Höhere Rechengenauigkeit nützt nichts.*

Wie erkennt der Laie schlecht konditionierte Matrizen bzw. Gleichungssysteme?

- Bei einem Gleichungssystem ändert man auf der Rechten Seite bei irgendeiner Zahl die 3. oder 4. Kommastelle (z.B. aus 3.145 eine 3.146 machen). Ändert sich die berechnete Lösung darauf hin brutal, dann liegt schlechte Kondition vor.
- Bei einer Matrix berechnet man die Inverse. Dann ändert man eine Kommastelle und berechnet die Inverse der Inversen. Das müsste die Ausgangsmatrix ergeben. Kommen brutal andere Werte heraus, dann ist die Matrix schlecht konditioniert (quasisingulär).

11.4 Determinanten

	<p>Die Determinante („Bestimmende“) einer quadratischen Matrix ist geometrisch das von den Zeilenvektoren aufgespannte Volumen. Je dichter die Zeilenvektoren zusammenfallen, desto kleiner ist die Determinante. Ihren maximalen Wert hat sie, wenn die Zeilenvektoren senkrecht aufeinander stehen.</p>
--	---

Berechnung von Determinanten bei $n=2$ bzw. $n=3$ nach Sarrus (**Sarrus'sche Regel**)
(Der französische Mathematiker Pierre-Frédéric Sarrus lebte von 1798 bis 1861)

$$n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad D_A = |A| = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$n=3 \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$D_A = A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}$
--	---

(Die 3 positiven Terme folgen den abfallenden Linien, die 3 negativen Terme den ansteigenden Linien).

Ab $n = 4$ sollte man nicht mehr die Sarrus'sche Regel verwenden, denn die wird dann eklig kompliziert. Excel z.B. macht intern aus der Matrix eine Dreiecksmatrix wie beim Gauß-Eliminationsverfahren und multipliziert einfach die Pivotelemente. Das Produkt ist die Determinante:

$$D = |A| = \prod_{i=1}^n P_i$$

11.4.1 Die Cramer'sche Regel zur Lösung kleiner Gleichungssysteme für $n=2$ bzw. $n=3$
(Der Schweizer Mathematiker Gabriel Cramer lebte von 1704 bis 1752)

$$A \vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad x_k = \frac{\text{Det } A^k}{\text{Det } A} \quad A^k \text{ entsteht aus } A, \text{ indem man die } k\text{-te Spalte von } A \text{ durch die rechte Seite } \vec{b} \text{ ersetzt}$$

Zahlenbeispiel für n=2

$$\begin{array}{l} 3x_1 - 7x_2 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{array} \quad \text{oder als Matrixgleichung} \quad \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot 2 - 2 \cdot (-7)}{3 \cdot 2 - 4 \cdot (-7)} = \frac{24}{34} = 0,706 \quad (\text{erste Spalte der Matrix ersetzt})$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot 5}{3 \cdot 2 - 4 \cdot (-7)} = \frac{-14}{34} = -0,412 \quad (\text{zweite Spalte der Matrix ersetzt})$$

Probe: $3 \cdot 0,706 - 7 \cdot (-0,412) = 5,002$ Probe O.K.
 $4 \cdot 0,706 + 2 \cdot (-0,412) = 2,000$

Sehr große Gleichungssysteme löst man iterativ nach Gauß, nach Seidel oder nach Jordan, um nur einige Verfahren zu nennen. Wann benutzt man etwa welche Methode?
n=2 oder n=3, dann Cramer'sche Regel oder Einsetzungsverfahren
n=2 bis n=100, dann Gauß- oder Gauß-Jordan-Elimination
n>100, dann iterative Verfahren nach Gauß, nach Seidel oder nach Jordan

11.4.2 Beispiel Vereinfachte Spektrometerauswertung

Lösungen von je 1 Mol/l der 3 Stoffe A, B, C geben im Absorptionsspektrometer folgende bereits logarithmierte Skaleneinheiten:

Wellenlänge	420 nm	A=132	B=36	C=48
	450 nm	A=84	B=92	C=17
	480 nm	A=29	B=81	C=57

Ein Prozess liefert A, B, C gemischt in wässriger Lösung. Eine Interaktion bei der Absorption findet nicht statt. Eine Messung der Lösung liefert bei

Wellenlänge	420 nm	$I_1 = 111,1$	Skaleneinheiten
	450 nm	$I_2 = 97,1$	Skaleneinheiten
	480 nm	$I_3 = 57,8$	Skaleneinheiten

Mit welchen Molzahlen ist welcher Stoff vertreten? Das Gleichungssystem lautet:

$$\begin{array}{l} 132 A + 36 B + 48 C = 111,1 \\ 84 A + 92 B + 17 C = 97,1 \\ 29 A + 81 B + 57 C = 57,8 \end{array}$$

Die Cramer'sche Regel für $n=3$ ergibt die 4 Determinanten. Die aus der rechten Seite eingesetzten Matrixelemente sind fett dargestellt.:

$$D = 132 \cdot 92 \cdot 57 + 36 \cdot 17 \cdot 29 + 48 \cdot 84 \cdot 81 \\ - 29 \cdot 92 \cdot 48 - 81 \cdot 17 \cdot 132 - 57 \cdot 84 \cdot 36 = 554\,352$$

$$D_A = \mathbf{111,1} \cdot 92 \cdot 57 + 36 \cdot 17 \cdot \mathbf{57,8} + 48 \cdot \mathbf{97,1} \cdot 81 \\ - \mathbf{57,8} \cdot 92 \cdot 48 - 81 \cdot 17 \cdot \mathbf{111,1} - 57 \cdot \mathbf{97,1} \cdot 36 = 388\,028$$

$$D_B = 132 \cdot \mathbf{97,1} \cdot 57 + \mathbf{111,1} \cdot 17 \cdot 29 + 48 \cdot 84 \cdot \mathbf{57,8} \\ - 29 \cdot \mathbf{97,1} \cdot 48 - \mathbf{57,8} \cdot 17 \cdot 132 - 57 \cdot 84 \cdot \mathbf{111,1} = 221\,589$$

$$D_C = 132 \cdot 92 \cdot \mathbf{57,8} + 36 \cdot \mathbf{97,1} \cdot 29 + \mathbf{111,1} \cdot 84 \cdot 81 \\ - 29 \cdot 92 \cdot \mathbf{111,1} - 81 \cdot \mathbf{97,1} \cdot 132 - \mathbf{57,8} \cdot 84 \cdot 36 = 49\,825$$

Durch Division der Determinanten erhalten wir die Lösungen:

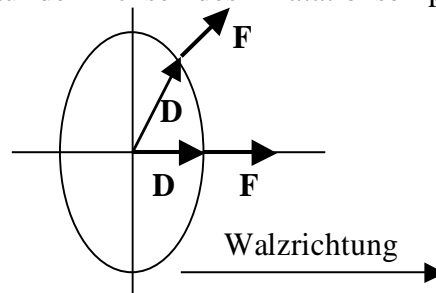
Molzkonzentration	$A = D_A / D = 0,6999$	gerundet	0,70
	$B = D_B / D = 0,3997$	gerundet	0,40
	$C = D_C / D = 0,0899$	gerundet	0,09

Probe mit der 1. Gleichung: $132 \cdot 0,70 + 36 \cdot 0,40 + 48 \cdot 0,09 = 111,12$ O.K.

11.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

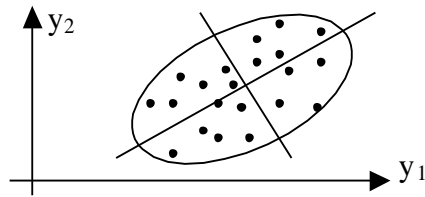
Eigenwerte spielen u.a. in folgenden Wissensgebieten eine Rolle:

Elastizitätslehre: Anisotropes Material, z.B. gewalzter Stahl, hat die Eigenschaft, dass Dehnung \mathbf{D} und Kraft \mathbf{F} nur auf den Achsen des Dilatationsellipsoids gleiche Richtung haben.

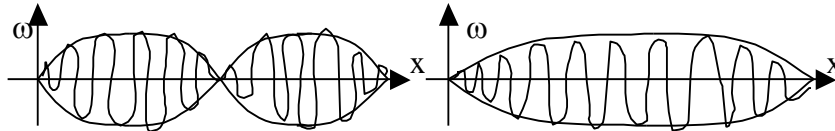


In der **Kristalloptik** ist die Lichtgeschwindigkeit abhängig von der Richtung im Kristall. Elektrische Feldstärke und dielektrische Verschiebung haben nur auf den Achsen des Fresnel'schen Ellipsoids gleiche Richtung.

In der **mathematischen Statistik** haben die Achsen des Korrelationsellipsoids die Richtung der Eigenvektoren der Kovarianzmatrix. In der Abbildung sind die Punkte Objekte (Probanden, Patienten), die durch Matrixzeilen (Patientendaten y_1, y_2, \dots) repräsentiert werden.



In der **Wellenmechanik** stehender Wellen ist die Lösung der Wellengleichung $\frac{d^2\omega}{dx^2} + k^2\omega = 0$ nur für bestimmte Werte von k^2 lösbar (die Eigenwerte der Lösung).



Eine symmetrische quadratische Matrix A hat reelle Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander. Bei Multiplikation mit A ändern sie nicht ihre Richtung, sondern allenfalls ihre Länge. Die **Eigenwertgleichung** lautet:

$$A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

- A ist die quadratische symmetrische Matrix
- \vec{x} ist einer der Eigenvektoren
- λ ist der zum Eigenvektor zugehörige Eigenwert

Die Berechnung der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ist z.B. mit dem **Charakteristischen Polynom** der Matrix möglich:

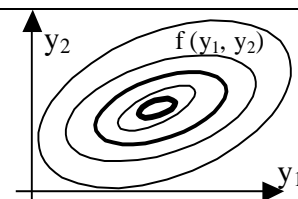
$$P(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Bei $n=2$ ist
$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12}$$

Nach dem Ausmultiplizieren der Klammern und einer kleinen Umordnung entsteht hier eine quadratische Gleichung, deren Lösungen man mit der p-q-Formel oder der Mitternachtsformel finden kann. Die beiden Lösungen sind die gesuchten Eigenwerte.

Zahlenbeispiel aus der Mathematischen Statistik

Die Graphik rechts zeigt die Höhenlinien einer 2-dimensionalen Dichteverteilung. Die kleinste Ellipse im Zentrum markiert den Gipfel. Zu den Rändern hin fällt die Dichte ab. Der allgemeine Fall ist eine p-dimensionale Verteilung (nicht zeichenbar).



Die p-dimensionale vektorielle Größe $y' = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ heißt normalverteilt, wenn die Dichte die folgende Form hat (zur Erinnerung: das Apostroph heißt hier *transponiert*, d.h. Zeile statt Spalte) :

$$f(y_1, y_2, \dots, y_p) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p} \sqrt{|\Sigma|}} e^{-(1/2)(y-\mu)' \Sigma^{-1} (y-\mu)}$$

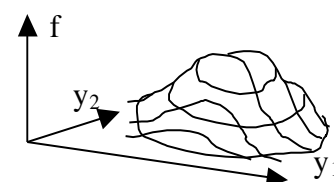
$\mu' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ ist der Vektor der p Mittelwerte der p Datenspalten der (n, p)-Datenmatrix. mit n Zeilen zu n Probanden oder Patienten.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die **Kovarianzmatrix** Σ hier nur für p=2 dargestellt. Die Erweiterung auf höhere p-Werte lässt sich leicht ableiten.

$$\Sigma = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} \Sigma(y_{1i} - \bar{y}_1)^2 & \Sigma(y_{1i} - \bar{y}_1)(y_{2i} - \bar{y}_2) \\ \Sigma(y_{2i} - \bar{y}_2)(y_{1i} - \bar{y}_1) & \Sigma(y_{2i} - \bar{y}_2)^2 \end{pmatrix}$$

Jede Summation Σ in der Matrix erfolgt über alle n Patienten ($i=1, 2, \dots, n$). Leider ist hier die Matrixbezeichnung und das Summenzeichen identisch, sorry!

$|\Sigma|$ in der Dichtefunktion $f(y_1, y_2, \dots, y_p)$ ist die Determinante der Kovarianzmatrix Σ .

<p>Die Dichtefunktion ist im 2-dimensionalen Fall (p=2) ein Berg mit elliptischen Höhenlinien. Die meisten Patientendaten liegen beim Durchschnitt (Mittelwert). Nach außen werden es weniger.</p>	
--	---

Im 3-dimensionalen Fall kann man sich ein Ei vorstellen, das im Zentrum fest ist und nach außen immer weicher und poröser wird. Bei noch höherer Dimension versagt unsere Vorstellung, nicht aber der Formelapparat. Dr. Gmyrek aus Berlin hat 20 Neugeborene gewogen und gemessen. Das Gewicht ist y_1 , die Länge ist y_2 . Die Mittelwerte und die Kovarianzmatrix sind:

Mittelwertvektor
(Schätzung von μ) $\bar{y} = \begin{pmatrix} 3,509 \\ 51,5 \end{pmatrix} \begin{matrix} Kg \\ cm \end{matrix}$

Kovarianzmatrix
(Schätzung von Σ) $S = \begin{pmatrix} 0,2137 & 0,823 \\ 0,823 & 4,89 \end{pmatrix}$

Das Charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = (0,2137 - \lambda)(4,89 - \lambda) - 0,823^2$

oder $\lambda^2 - 5,1037\lambda + 0,3676$

Die Wurzeln sind $\lambda_1 = 5,0308$ und $\lambda_2 = 0,0730$

Die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ erhält man aus der

Eigenwertgleichung $A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 0,2317 & 0,823 \\ 0,823 & 4,89 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = 5,0306 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda_1$$

d.h. $0,2137 x_{11} + 0,823 x_{21} = 5,0306 x_{11}$
 $0,823 x_{11} + 4,89 x_{21} = 5,0306 x_{21}$

Wir müssen das kleine Gleichungssystem lösen. Da unser Eigenvektor \bar{x}_1 unnormiert sein darf, setzen wir willkürlich $x_{11} = 1$. Die obere Gleichung gibt dann

$$0,2317 + 0,823 x_{21} = 5,0306$$

bzw. $x_{21} = \frac{5,0306 - 0,2137}{0,823} = 5,8528$ und damit $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 5,8528 \end{pmatrix}$

Wichtig an unserem Eigenvektor ist nicht die Länge (Norm), sondern die Richtung, die durch die relative Länge der beiden Komponenten und durch deren Vorzeichen vorgegeben wird. Bei Benutzung der unteren Gleichung kommt übrigens exakt derselbe Eigenvektor heraus.

Jetzt der zweite Eigenvektor \bar{x}_2 . Die Eigenwertgleichung liefert wieder zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0,2137 x_{12} + 0,823 x_{22} &= 0,0730 x_{12} \\ 0,823 x_{12} + 4,89 x_{22} &= 0,0730 x_{22} \end{aligned}$$

Auch hier reicht es, eine der beiden Gleichungen zu lösen. Wir setzen $x_{12} = 1$.

$$0,2317 + 0,823 x_{22} = 0,0730$$

gibt $x_{22} = \frac{0,0730 - 0,2137}{0,823} = -0,1709$ und damit $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1,0 \\ -0,1709 \end{pmatrix}$

Wir haben jetzt die Richtungen der beiden Achsen der Korrelationsellipse. Wir machen die Achsen am Mittelwert fest. Jetzt möchten wir eine bestimmte Ellipse als Höhenlinie der Dichteverteilung zeichnen. Möglich wären etwa folgende Vorgehensweisen:

- Wir zeichnen eine Ellipse zur konstanten Dichte K , d.h., $f(y_1, y_2) = K$
- Die Ellipse, in der 95% aller Einzelobjekte erwartet werden, die sogenannte Konfidenzellipse der Einzelwerte
- Die Ellipse, in der mit 95% Wahrscheinlichkeit das wahre Mittel $\mu' = (\mu_1, \mu_2)$ erwartet wird, d.h., die Konfidenzellipse für das wahre Mittel der Population

Wir wählen hier die Konfidenzellipse für das wahre Mittel der Population. Die ist nach Ahrens & Läuter

$$\frac{(n-p)n}{(n-1)p} (y - \bar{y})' S^{-1} (y - \bar{y}) = F_{p, n-p, \alpha}$$

Dabei sind $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ die gesuchten Ellipsenkoordinaten und $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}$ der Mittelpunkt.

$F_{p,n-p,\alpha}$ ist Sicherheitspunkt der F-Verteilung von Fisher mit den Freiheitsgraden $FG_1 = p$ und $FG_2 = n - p$ und der Irrtumswahrscheinlichkeit α (meist 5% oder 0,05). Den Wert findet man in vielen Statistikbüchern, im Skript Biomedizinische Statistik oder man berechnet ihn in Excel mit der Statistikfunktion FVERT. Dort findet man für die aktuellen Zahlen $n=20$ und $p=2$

$$F_{p,n-p,\alpha} = F_{2,18,0.05} = 3,55$$

Die inverse Matrix S^{-1} berechnen wir aus der Kovarianzmatrix S nach der Cramer'schen Regel.

$$S = \begin{pmatrix} 0,2137 & 0,823 \\ 0,823 & 4,89 \end{pmatrix} \text{ mit der Determinante } \text{Det}(S) = 0,2137 \cdot 4,89 - 0,823^2 = 0,3676$$

Wir lösen die beiden Gleichungssysteme

$$S \cdot \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S \cdot \begin{pmatrix} z_{12} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten die Spalten der inversen Matrix $S^{-1} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$

Nach der Vorgehensweise der Cramer'schen Regel setzen wir die rechten Seiten der Gleichungssysteme in die Matrix S ein und berechnen die Determinanten:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0,823 \\ 0 & 4,89 \end{pmatrix} = 4,89 \quad \text{und damit} \quad z_{11} = 4,89 / 0,3676 = 13,302$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 0,2137 & 1 \\ 0,823 & 0 \end{pmatrix} = -0,823 \quad \text{und damit} \quad z_{21} = -0,823 / 0,3676 = -2,2398$$

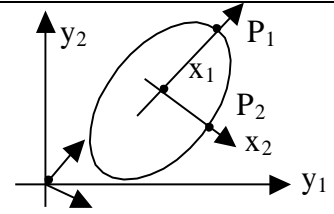
$$\text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 0,823 \\ 1 & 4,89 \end{pmatrix} = -0,823 \quad \text{und damit} \quad z_{12} = -0,823 / 0,3676 = -2,2398$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 0,2137 & 0 \\ 0,823 & 1 \end{pmatrix} = 0,2137 \quad \text{und damit} \quad z_{22} = 0,2137 / 0,3676 = 0,5813$$

Da der Faktor $K = \frac{(n-p)n}{(n-1)p} = \frac{18 \cdot 20}{19 \cdot 2} = 9,4737$ laut Ahrens & Lauter immer wieder auftritt, multiplizieren wir ihn gleich in die inverse Matrix S^{-1} mit hinein und erhalten die Matrix

$$K \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 126,02 & -21,21 \\ -21,21 & 5,507 \end{pmatrix}$$

P_1 liegt auf der Ellipse und auf dem Strahl x_1 , d.h. auf der Richtung des ersten Eigenvektors. P_2 liegt ebenfalls auf der Ellipse, aber auf dem Strahl x_2 , d.h. auf der Richtung des zweiten Eigenvektors. Um Rechenarbeit zu sparen, verlegen wir das Ellipsenmittel zum Ursprung $\bar{y}' = (0.0, 0.0)$



Die Gleichung von Ahrens & Läuter wird dann einfacher und lautet nun $y' K S^{-1} y = 3,55$ oder ausführlicher geschrieben

$$(y_1, y_2) \begin{pmatrix} 126,02 & -21,21 \\ -21,21 & 5,507 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3,55$$

Das ist eine Ellipsengleichung, die die Kontur der Ellipse festlegt. Nur solche Kombinationen (Punktkoordinaten) von (y_1, y_2) sind zugelassen, die den Wert 3,55 ergeben. Zum Zeichnen reicht es uns, wenn wir die versetzten Punktkoordinaten der beiden Punkte P_1 und P_2 berechnen. Im PC könnte man natürlich weit mehr Punkte berechnen lassen.

Wir versuchen also zuerst die Koordinaten (y_1, y_2) von Punkt P_1 zu berechnen.

Auf dem Strahl x_1 gilt wegen $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5,8528 \end{pmatrix}$ die Beziehung $y_2 = 5,8528 \cdot y_1$

oder $y_2 = k \cdot y_1$ mit $k = 5,8528$. Das ist eine Geradengleichung.

Eingesetzt in die Ellipsengleichung erhalten wir eine Gleichung, in der nur noch y_1 als Unbekannte auftritt.

$$(y_1, k \cdot y_1) \begin{pmatrix} 126,02 & -21,21 \\ -21,21 & 5,507 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ k \cdot y_1 \end{pmatrix} = (y_1 \cdot 126,02 - k \cdot 21,21 \cdot y_1, -21,21 \cdot y_1 + k \cdot 5,507 \cdot y_1) \begin{pmatrix} y_1 \\ k y_1 \end{pmatrix}$$

$$= y_1^2 \cdot 126,02 - k \cdot 21,21 \cdot y_1^2 - k \cdot 21,21 \cdot y_1^2 + k^2 \cdot 5,507 \cdot y_1^2 = 3,55$$

Wir lösen diese Gleichung nach y_1^2 auf und erhalten mit $k = 5,8528$ von oben

$$y_1^2 = \frac{3,55}{126,02 - 2 \cdot k \cdot 21,21 + k^2 \cdot 5,507} = \frac{3,55}{66,397} = 0,05347 \quad \text{oder} \quad y_1 = 0,2312$$

Koordinate y_1 ist die Verrückung des Punktes P_1 nach rechts.

Für y_2 gilt $y_2 = k \cdot y_1 = 1,3534$ gemäß obiger Geradengleichung des Einheitsvektors \bar{x}_1 . Damit haben wir die beiden Koordinaten des Punktes P_1 gefunden.

Wir versuchen jetzt die Koordinaten (y_1, y_2) von Punkt P_2 zu berechnen.

Auf dem Strahl x_2 gilt wegen $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,1708 \end{pmatrix}$ die Beziehung $y_2 = -0,1708 \cdot y_1$

oder $y_2 = k \cdot y_1$ mit $k = -0,1708$.

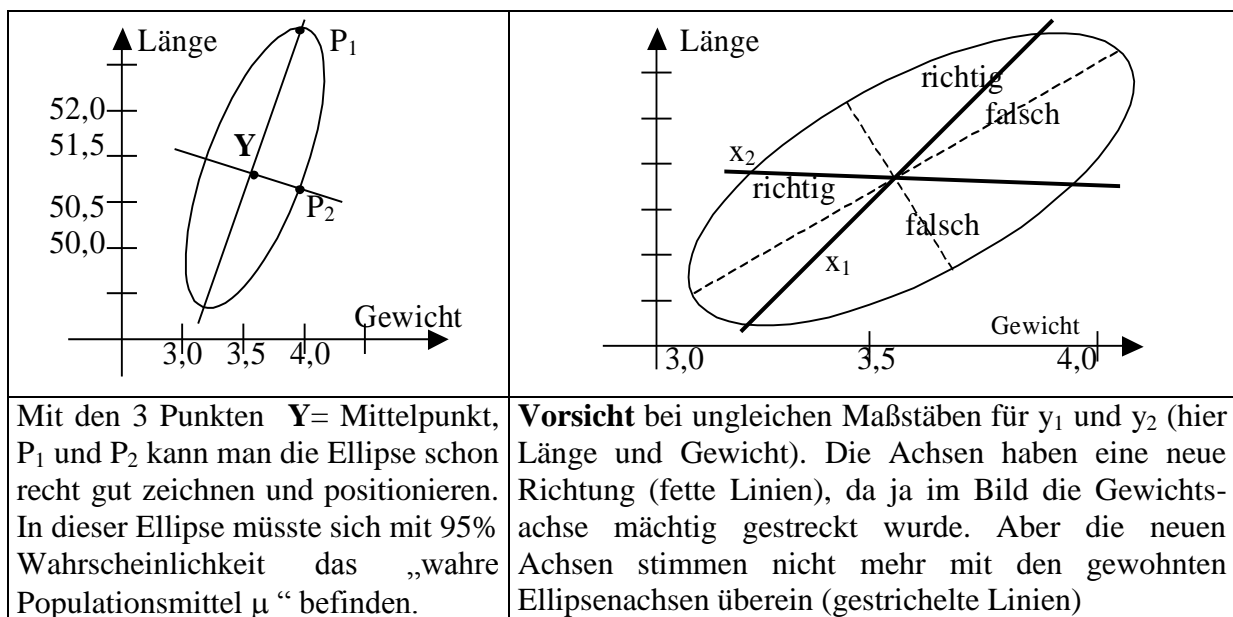
Da sich nur k geändert hat, können wir dieselbe Gleichung $y_1^2 = \dots$ wie oben benutzen, müssen nur das neue k einsetzen. Wir erhalten

$$y_1^2 = \frac{3,55}{133,43} = 0,0266 \quad \text{oder} \quad y_1 = 0,163 \quad \text{und mit} \quad y_2 = -0,1708 \cdot y_1 = -0,0278.$$

Damit haben wir auch die Koordinaten von Punkt P_2 .

Um die Ellipse am richtigen Ort zeichnen zu können, machen wir die Koordinatenverschiebung rückgängig, d.h., wir addieren zu beiden Punktkoordinaten wieder den Mittelpunkt und erhalten so die endgültigen Koordinaten von P_1 und P_2 :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3,509 + 0,2312 \\ 51,5 + 1,3534 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,74 \\ 52,85 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3,509 + 0,163 \\ 51,5 - 0,0278 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,67 \\ 51,47 \end{pmatrix}$$



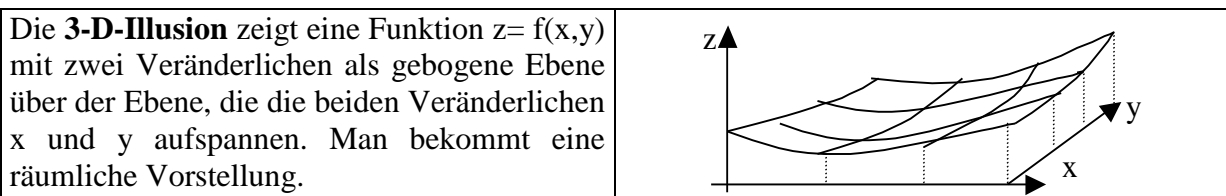
Merke: Es gibt Programme, die Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen, z.B. das **Jakobi-Verfahren**

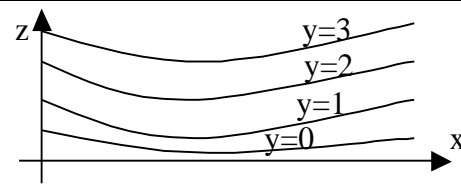
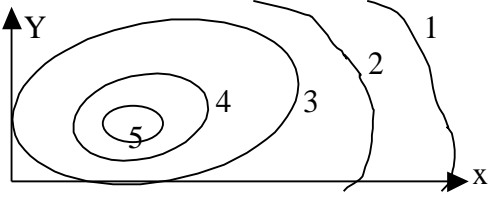
12. Funktionen mehrerer Veränderlicher

12.1 Einführung

Die beiden Funktionen $f(x)$ oder $f(t)$ sind beides Funktionen einer Veränderlichen. Die Funktionen $f(x, t)$ oder $g(x, y, z)$ sind Funktionen mehrerer Veränderlicher.

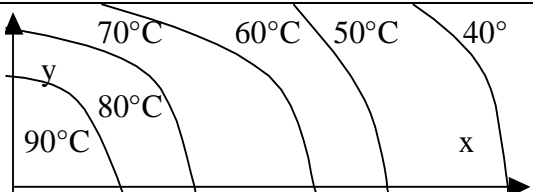
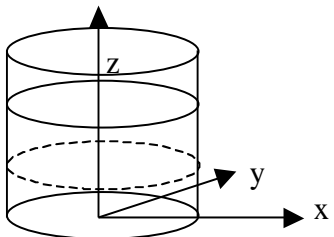
Darstellungsarten



<p>Die 2-D-Parameterdarstellung zeigt die Funktion als Kurvenschar einfacher Funktionen über x. Die zweite Veränderliche, y, wurde zum Parameter degradiert. Nur für bestimmte ausgewählte y-Werte erscheinen Kurven.</p>	
<p>Darstellung mit Höhenlinien: Man schaut von oben auf die x-y-Ebene, auf der die Funktion $z = f(x,y)$ definiert ist. Die Linien gleicher Höhe werden dargestellt. Das erinnert an Landkarten, wo ebenso verfahren wird.</p>	

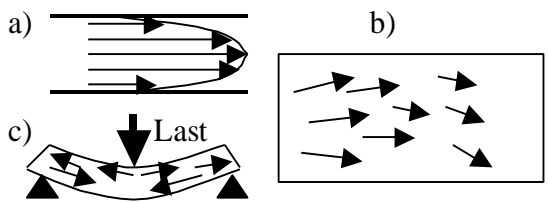
Skalare Felder

Skalare Felder sind Funktionen auf einer Ebene oder im Raum

<p>Auf einem Blech wird ein x-y-Koordinatensystem gedacht. Die Linien gleicher Temperatur werden als Höhenlinien gezeichnet. Links unten am Blech sitzt offensichtlich die Wärmequelle.</p>	
<p>Konzentrationsverteilung $K(z)$ in einem Tank. Eigentlich müsste es $K(x, y, z)$ heißen, aber in x- bzw. y-Richtung ändert sich hier die Konzentration nicht. Jede Schicht (gestrichelte Höhe) hat ihre Konzentration. Der Salzgehalt sinkt mit der Höhe z.</p>	

Vektorfelder

Jedem Ebenenpunkt bzw. jedem Raumpunkt ist eine Vektor zugeordnet. Ein Vektor hat Länge und Richtung, und wird meist durch einen Pfeil dargestellt.

<p>a) Strömung in einem Rohr: Am Rand ist die Strömung durch die Reibung geringer. Im Zentrum ist sie am größten. b) Windkarte $v(x, y)$ c) Kraft bzw. Dehnung im Material</p>	
---	--

Rein mathematisches Beispiel eines Vektorfeldes in einer Ebene (ohne sinnvolle Anwendung). Die Länge (und das Vorzeichen) jeder der beiden Komponenten A_x und A_y wird getrennt durch eine Formel vorgegeben. Für jeden beliebigen Punkt der x - y -Ebene lässt sich so ein Vektor \vec{A} berechnen

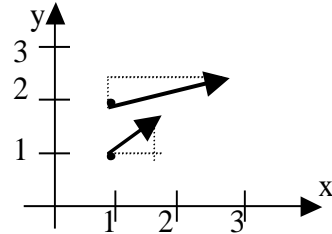
$$\vec{A}(x, y) = (A_x, A_y) = \left(\frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Beispiel für 2 Punkte

$$\vec{A}(1, 2) = \left(\frac{4}{\sqrt{1+4}}, \frac{1}{\sqrt{1+4}} \right) = (1.78, 0.45)$$

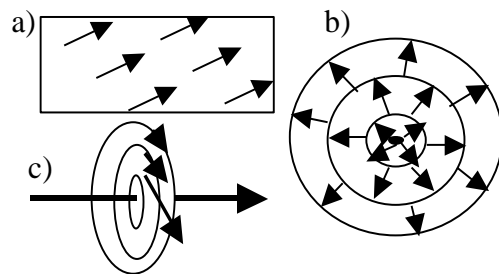
$$\vec{A}(1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+1}}, \frac{1}{\sqrt{1+1}} \right) = (0.71, 0.71)$$

Komponente A_x zeigt nach rechts, A_y nach oben.



Spezielle Vektorfelder

Homogenes Vektorfeld $\vec{A}(x, y) = (K_x, K_y)$,
d.h. alle Vektoren sehen gleich aus.
Radialsymmetrisches Vektorfeld
 $\vec{A}(r) = f(r)$, d.h., die Vektoren zeigen alle
nach außen (bzw. innen). Ihre Länge ist $f(r)$.
Zylindrisches Vektorfeld $\vec{A}(r) = f(r)$, d.h.,
die Vektoren sind Tangenten mit Länge $f(r)$.



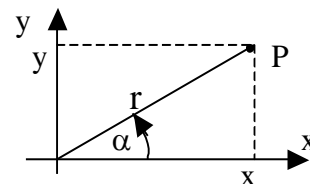
Koordinatensysteme der Ebene

Polarkoordinaten \leftrightarrow Kartesische Koordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r \cdot \cos(\alpha)$$

$$\alpha = \arctan(y/x) \quad !!! \qquad y = r \cdot \sin(\alpha)$$

(!!! Wenn $x < 0$, dann π oder 180° zu α addieren)



Koordinatensysteme im Raum

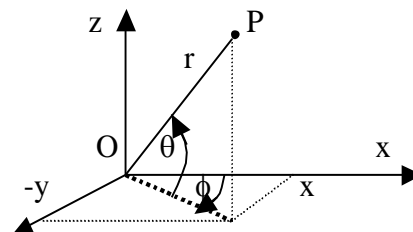
Kugelkoordinaten \leftrightarrow Kartesische Koordinaten

r = Radius x, y, z

ϕ = Meridian (Längengrad)

θ = Polwinkel (Breitengrad)

(Hier wurde die negative y -Achse gezeichnet)



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \arctan(y/x) \quad !!!$$

(!!! Wenn $x < 0$, dann π oder 180° zu α addieren)

$$x = r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi)$$

$$y = r \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\phi)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$z = r \cdot \sin(\theta)$$

Vorsicht! Manchmal wird ein anderes Koordinatensystem benutzt, bei dem der Winkel θ von der z-Achse (vom Pol) aus gezählt wird. Damit ändern sich die Formeln. Manche Autoren nehmen auch den arcsin statt des arctan. Auch das ändert die Formeln.

Zylinderkoordinaten

<p>Zylinderkoordinaten \leftrightarrow Kartesische Koordinaten</p> $r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r \cdot \cos(\phi)$ $\phi = \arctan(y/x) \quad !!! \qquad y = r \cdot \sin(\phi)$ <p>(!!! Wenn $x < 0$, dann π oder 180° zu α addieren)</p> $z = z \qquad z = z$	
--	--

Bei der Auswahl des geeigneten Koordinatensystems spielen viele Faktoren eine Rolle. Das Hauptprinzip ist jedoch, dass Berechnungen möglichst einfach werden. So muss es nicht unbedingt sein, dass ein kugelförmiger Tank mit Kugelkoordinaten beschrieben wird, sondern manchmal sind die Zylinderkoordinaten sogar günstiger, usw.

Das bewegliche Dreibein

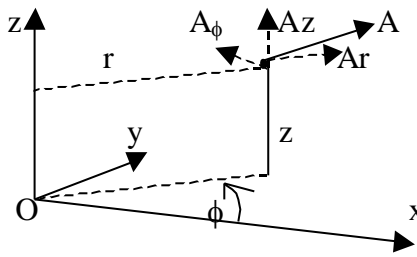
Das bewegliche Dreibein wird von den Komponenten eines Vektors aufgespannt, dessen Startpunkt P_0 mal hier, mal da liegt. Beispiel Erde: Unser Nord-Ost-oben-Dreibein zeigt in Europa in eine andere Richtung, als in Amerika. Zudem dreht es sich mit der Erde mit.

<p>Bei Kartesischen Koordinaten behält das Dreibein seine Raumrichtung. Ein Vektor \mathbf{A} wird im Punkt P_0 in dieselben drei Komponenten zerlegt, wie im Ursprung O.</p> $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$	
--	--

<p>Bei Kugelkoordinaten dreht sich das Dreibein nach den beiden Winkeln ϕ (Drehung um die z-Achse) und θ (Winkel von r zur x-y-Ebene). Komponente A_r liegt auf dem Radius r. A_ϕ liegt in ϕ-Drehrichtung, A_θ in θ-Drehrichtung. Alle drei Komponenten A_r, A_ϕ, A_θ stehen immer senkrecht aufeinander. $\mathbf{A} = \mathbf{A}_r + \mathbf{A}_\phi + \mathbf{A}_\theta$</p>	
---	--

Bei **Zylinderkoordinaten** dreht sich das Dreibein um die z-Achse. A_ϕ liegt in ϕ -Drehrichtung, A_r liegt auf dem Radius r . Beide Komponenten A_ϕ und A_r sind parallel zur x-y-Ebene. Komponente A_z steht senkrecht in z-Richtung. Für Vektor \mathbf{A} gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_r + \mathbf{A}_\phi + \mathbf{A}_z$$



Achtung: Wir dürfen die Komponenten eines Vektors, z.B. A_r, A_ϕ, A_θ bei Kugelkoordinaten, nicht mit den Achseneinheitsvektoren, z.B. $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta$ verwechseln. Die Achseneinheitsvektoren $\mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta$ zeigen z.B. immer in die positive Drehrichtung der Winkel ϕ und θ , \mathbf{e}_r immer in die Verlängerungsrichtung des Radius. Die Komponenten $\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_\phi, \mathbf{A}_\theta$ eines Vektors \mathbf{A} können jedoch positiv oder negativ sein, d.h. gleiche Richtung oder entgegengesetzte Richtung wie die Achseneinheitsvektoren haben. Zudem ist die Länge der Achseneinheitsvektoren auf 1 normiert, während Vektorkomponenten beliebige positive oder negative Werte annehmen können.

Beispiel Umrechnung eines Vektors von Zylinderkoordinaten auf Kartesische Koordinaten

$\vec{A} = (A_r, A_\phi, A_z) = A_r \cdot \vec{e}_r + A_\phi \cdot \vec{e}_\phi + A_z \cdot \vec{e}_z$ ist der Vektor \mathbf{A} in Zylindereinheitsvektoren

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ bilden das bewegliche Achseneinheitsvektoren-Dreibein. In kartesischen Koordinaten ausgedrückt sind die drei Achseneinheitsvektoren (Zeichnung anschauen!!)

$$\mathbf{e}_r = (\cos(\phi), \sin(\phi), 0) = \cos(\phi) \cdot \mathbf{e}_x + \sin(\phi) \cdot \mathbf{e}_y + 0 \cdot \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\phi = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0) = -\sin(\phi) \cdot \mathbf{e}_x + \cos(\phi) \cdot \mathbf{e}_y + 0 \cdot \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_z = (0, 0, 1) = 0 \cdot \mathbf{e}_x + 0 \cdot \mathbf{e}_y + 1 \cdot \mathbf{e}_z$$

Damit wird Vektor \mathbf{A} , wenn wir die letzten drei Formeln oben einsetzen,

$$\vec{A} = A_r (\cos(\phi) \cdot \mathbf{e}_x + \sin(\phi) \cdot \mathbf{e}_y) + A_\phi (-\sin(\phi) \cdot \mathbf{e}_x + \cos(\phi) \cdot \mathbf{e}_y) + A_z (1 \cdot \mathbf{e}_z)$$

Wir ordnen die Komponenten nach $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ und erhalten

$$\vec{A} = (A_r \cos(\phi) - A_\phi \sin(\phi)) \cdot \mathbf{e}_x + (A_r \sin(\phi) + A_\phi \cos(\phi)) \cdot \mathbf{e}_y + A_z \cdot \mathbf{e}_z$$

oder unter Weglassung der Einheitsvektoren in der einfachen Komponentenschreibweise geklammert und durch Kommas getrennt:

$$\vec{A} = (A_r \cos(\phi) - A_\phi \sin(\phi), (A_r \sin(\phi) + A_\phi \cos(\phi)), A_z)$$

oder kurz

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

12.2 Partielle Ableitungen einer Funktion mehrerer Veränderlicher

Die partielle Ableitung liefert den Anstieg einer Tangente an einer Funktion im Punkt P in einer bestimmten Richtung.

Beispiel: Sie stehen auf dem Feldberg im Punkt P und gehen in Ostrichtung (x-Richtung). Geht es aufwärts in dieser Richtung, ist die partielle Ableitung f_x in diesem Punkt positiv. Gehen Sie vom selben Punkt in Nordrichtung und geht es da abwärts, dann ist die partielle Ableitung f_y in diesem Punkt negativ.

Die partiellen Differenzial und Differenzenquotienten einer Funktion $z = f(x,y)$ sind

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Das praktische Differenzieren einer Funktion erfolgt auf genau die gleiche Art und Weise, wie bei den gewöhnlichen Funktionen einer Veränderlichen, **nur dass man die jeweils andere Variable, nach der gerade nicht differenziert wird, wie eine Konstante behandelt.**

Beispiel: $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2y \cdot (x^2 + y^2) - 2xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

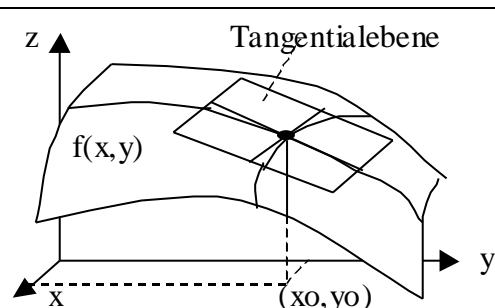
Hier wurde y beim Differenzieren nach x wie eine Konstante behandelt (y = Konstante)

Die Tangentialebene

Man denke sich eine Pappe an einen Punkt $f(x_0, y_0)$ der gewölbten Funktion $f(x,y)$ gedrückt. Die Gleichung der Tangentialebene ist dann:

$$\begin{aligned} Z &= f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) \end{aligned}$$

$A = f_x$ und $B = f_y$ sind die Richtungsanstiege.



$Z = f(x_0, y_0)$ ist der Funktionswert im Berührungspunkt
 $A = f_x$ ist die partielle x-Ableitung im Punkt (x_0, y_0)
 $B = f_y$ ist die partielle y-Ableitung im Punkt (x_0, y_0)

Die Tangentialebene entspricht der Tangente an eine Kurve im Fall einer Funktion mit nur einer Veränderlichen. Die Tangentialebene ist auch die Taylorreihenentwicklung der Funktion $f(x,y)$ bis zum linearen Glied, und spielt damit eine wichtige Rolle in vielen Disziplinen.

Höhere partielle Ableitungen

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad \text{ist der Anstieg in x-Richtung}$$

$$f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad \text{ist der Anstieg in y-Richtung}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) \quad \text{ist die Krümmung in x-Richtung}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) \quad \text{ist die Krümmung in y-Richtung}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} f_x \quad \text{ist die x-Anstiegsänderung in y-Richtung}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} f_y \quad \text{ist die y-Anstiegsänderung in x-Richtung}$$

Zumeist gilt $f_{yx} = f_{xy}$. Beim Lesen der Indexkette, z.B. „y x“, geht man von rechts nach links, d.h., zuerst partiell nach x ableiten, dann nach y.

Beispiel $f(x,y) = 2y^2 - xy + (x^2/2)$

$$f_x = -y + x$$

$$f_{yx} = -1$$

beide gleich

$$f_y = 4y - x$$

$$f_{xy} = -1$$

Totales Differenzial

Die Änderung des Funktionswertes dz bei Fortschreiten im Raum (x,y) um die kleine vektorielle Strecke $d\vec{r}$ heißt Totales Differenzial und spielt eine wichtige Rolle, z.B. in der Thermodynamik. Die Änderung dz wird so berechnet, als schreite man vom Punkt $P=f(x_0,y_0)$ auf der Tangentialebene (über dem Schrittschen $d\vec{r}$ auf der x-y-Ebene) bis zum Punkt Z voran. Dann ist dz der Höhengewinn von Punkt Z bezogen auf den Ausgangspunkt P.

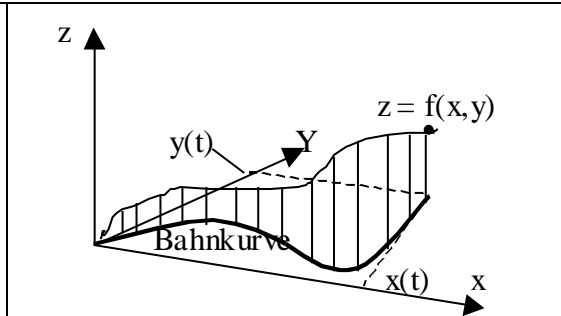
<p>Schritt im Raum: $d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y$</p> <p>Totales Differenzial: $dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = f_x dx + f_y dy$</p>	
--	--

Kettenregel 1 für mittelbare Funktionen

Problem: Ein Punkt bewegt sich auf einer Bahnkurve, deren Koordinaten auf der x-y-Ebene durch die Funktionen $x = x(t)$ und $y = y(t)$ gegeben sind.

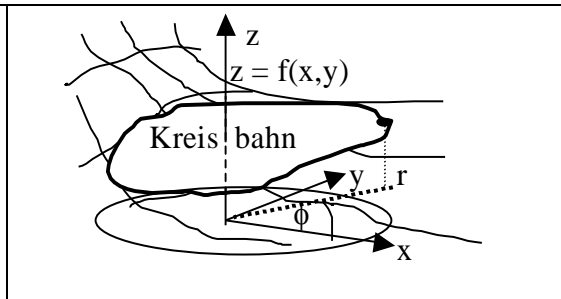
Die Größe t heißt Parameter und könnte z.B. die Zeit sein oder die zurückgelegte Wegstrecke, die der Punkt schon unterwegs ist. Außerdem ist das Geländeprofil als Funktion $z = f(x,y)$ gegeben. Gesucht ist der Anstieg pro Parameterschritt dt . Kettenregel 1 lautet:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$



Kettenregel 2 für mittelbare Funktionen

Problem: Ein Punkt bewege sich auf einer Bahn, z.B. einer Kreisbahn, die am leichtesten in Polarkoordinaten beschrieben werden kann. Das Geländeprofil $z = f(x,y)$ sei aber in einem anderen Koordinatensystem beschrieben, z.B. in Kartesischen Koordinaten x und y . Gesucht sind die partiellen Ableitungen nach den Bahnkoordinaten (z.B. Polarkoordinaten r und ϕ).



Beispiel: $x = x(r, \phi) = r \cdot \cos(\phi)$

$r = \text{Bahnradius}$

$y = y(r, \phi) = r \cdot \sin(\phi)$

$\phi = \text{Winkel}$

Gegeben ist das Geländeprofil $z = f(x,y)$, gesucht sind die Änderungen von z in r -Richtung (radiale Ableitung) und in ϕ -Richtung (tangente Ableitung). Kettenregel 2 lautet in diesem Fall:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{Änderungen von } z \text{ in } r\text{-Richtung (radiale Ableitung)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} \quad \text{Änderungen von } z \text{ in } \phi\text{-Richtung (tangente Ableitung)}$$

Beispiel: Kreisbahn im Abstand $r = 0,8$ [m] um den Koordinatenursprung im Geländeprofil $z = x^2 + y^2$ ebenfalls in Meter. Der Radius r ist konstant, Winkel ϕ ändert sich. Gesucht ist der Anstieg $\partial z / \partial \phi$ mit $z = x^2 + y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} = 2 \cdot x \cdot (-r \cdot \sin(\phi)) + 1 \cdot r \cdot \cos(\phi)$$

Bei einem aktuellen Winkel von $\phi = 30^\circ$ finden wir:

$$\partial z / \partial \phi = 2 \cdot r \cdot \cos(30^\circ) (-r \cdot \sin(30^\circ)) + r \cdot \cos(30^\circ)$$

oder

$$\partial z / \partial \phi = 2 \cdot 0,8 \cdot 0,866 (-0,8 \cdot 0,5) + 0,8 \cdot 0,866 = 0,138 \text{ [m/Rad]}$$

Falls wir den Anstieg pro Grad wünschen, dann das Ergebnis mit $180 / \pi$ multiplizieren. Kettenregel 2 ist natürlich auch bei anderen Kombinationen von Koordinatensystemen anwendbar, muss aber sinngemäß abgewandelt werden.

12.3 Der Gradient

So heißt der Vektor, der im Raum oder auf der Ebene die Richtung des stärksten Anstiegs einer Funktion $f(x,y)$ bzw. $f(x,y,z)$ anzeigt, und dessen Komponenten gerade die Größe der partiellen Ableitungen haben. Der Gradient ändert sich für gewöhnlich von Punkt zu Punkt.

Schreibweisen für den Gradienten sind:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = (f_x, f_y)^T = (f_x, f_y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{e}_y$$

Das Zeichen ∇ wird „Nabla“ genannt. Für ∇f spricht „Nabla f“. Trennt man das Nabla von der Funktion, dann bleibt der Differenzialoperator, *Nabla* oder *grad* genannt, übrig.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \quad \text{Bei Kartesischen Koordinaten } x, y, z \text{ im Raum}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta \quad \text{Bei Kugelkoordinaten } r, \phi, \theta \text{ im Raum}$$

Richtungsableitung

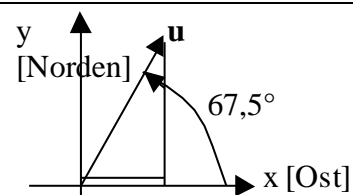
Als Richtungsableitung f_u bezeichnet man die Projektion des Gradienten auf eine beliebige Richtung \vec{u} , die durch diesen Vektor \vec{u} vorgegeben wird. Die Projektion eines Vektors auf eine Richtung berechnet man aus dem Skalarprodukt des Gradienten mit dem Einheitsvektor \vec{e}_u .

Beispiel: Gegeben ist die „Landschaft“ $z = f(x,y) = 2y^2 - xy + (x^2/2)$

Gesucht ist zuerst der Gradient im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$

$$\nabla f = (-y + x, 4y - x) = (-2 + 1, 4 \cdot 2 - 1) = (-1, 7) = -1 \cdot \vec{e}_x + 7 \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist jetzt die Richtungsableitung in Himmelsrichtung NNO, d. h. eine Richtung mit einem Winkel von $67,5^\circ$ gegen die x-Richtung (Osten). (In der Seefahrt und Luftfahrt wird dagegen rechts herum gezählt und bei Nord= 0° begonnen.)



Der Richtungsvektor \vec{u} hat demnach die beiden Komponenten

$$\vec{u} = \cos(67,5^\circ) \cdot \vec{e}_x + \sin(67,5^\circ) \cdot \vec{e}_y = (0,3827 \quad , \quad 0,9239)$$

Der Einheitsvektor $\vec{e}_u = \vec{u} / |\vec{u}|$ in u-Richtung ist hier identisch mit Vektor \vec{u} , da dieser schon die normierte Länge 1 hat, wie man leicht nachprüfen kann: $\sqrt{0,3827^2 + 0,9239^2} = 1$

$$\frac{df}{du} = \nabla f \cdot \vec{e}_u = (-1 \quad , \quad 7) \cdot (0,3827 \quad , \quad 0,9239) = -1 \cdot 0,3827 + 7 \cdot 0,9239 = 6,08$$

Um diesen Betrag würde sich die Höhe z ändern, ginge man eine Längeneinheit vom Punkt $(x=1 \quad , \quad y=2)$ auf der x-y-Ebene in Richtung u auf der Tangentialebene.

Der Einheitsvektor in Gradientenrichtung

Man dividiert den Gradienten durch seine Norm und erhält einen Einheitsvektor mit der Länge 1 und der Richtung des Gradienten:

$$\vec{e}_G = \left(\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + 7^2}} \quad , \quad \frac{7}{\sqrt{(-1)^2 + 7^2}} \right) = (-0,1414 \quad , \quad 0,9899)$$

Die Länge (Norm) des Gradienten ist bei unserem Beispiel $|\nabla f| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = 7,07$

Keine Richtungsableitung kann größer sein, da ja der Gradient mit seiner Norm die höchstmögliche Ableitung in einem Punkt (x,y) angibt. Um diesen Betrag $7,07$ würde sich die Höhe z ändern, ginge man eine Längeneinheit vom Punkt $(x=1 \quad , \quad y=2)$ auf der x-y-Ebene in Richtung des Gradienten.

Der Gradient in einer dimensionsbehafteten Ebene (Beispiel Anodische Oxydation)

Bei der Anodischen Oxidation wird Strom durch Abwasser geleitet. Man baut so schwer abbaubare Substanzen ab. Die Prozesskosten werden hauptsächlich von den Stromkosten und der Anodenfläche (teures Material) bestimmt. Ein Diplomand machte mit verschiedenen Stromstärken und unterschiedlich großen Anodenblechen Versuche. Zu jeder Kombination sind die Prozesskosten zur Aufreinigung von 1 [m³] Abwasser bekannt. Mit dem Programm multiple Regression von Excel wurde dann eine Kostenfunktion $K(i, A)$ durch die Datenpunkte gelegt. Die Funktion ist demnach über einer x-y-Ebene definiert. Die Skaleneinteilung in mm ist ebenfalls angegeben, da sie die Darstellung maßgeblich beeinflusst:

Stromstärke	i [mA]	wurde als x-Variable gewählt	mit 1 [mA] \cong 34 [mm]
Anodenfläche	A [cm ²]	wurde als y-Variable gewählt.	mit 1 [cm ²] \cong 0,6 [mm]
Kosten	K [Eu]	wurden zur z-Variablen	

Excel lieferte auf Grund der gemessenen Daten und berechneten Kosten folgende Kostenfunktion:

$$K [\text{Eu}] = -29,16 [\text{Eu}] + 3,355 [\text{Eu}/\text{mA}] \cdot i + 0,147 [\text{Eu}/\text{cm}^2] \cdot A - 0,00884 [\text{Eu}/(\text{mA} \cdot \text{cm}^2)] \cdot i \cdot A$$

Die Aufgabe war es, den Gradienten im Punkt $i = 12,2 [\text{mA}]$ und $A = 257,4 [\text{cm}^2]$ zu zeichnen. Das besondere Problem bei dieser Aufgabe bestand darin, die sehr unterschiedlichen Größen (Stromstärken lagen etwa bei 12 mA, die Anodenflächen etwa bei 280 cm^2) maßstabsmäßig zu verarbeiten. Die beiden Achsen können nicht gleich skaliert werden und damit verzerrt sich die Gradientenrichtung.

Die beiden Komponenten des Gradienten sind die partiellen Ableitungen von $K(i,A)$:

$$\frac{\partial K}{\partial i} = 3,355 - 0,00884 \cdot A = 1,07958 [\text{Eu} / \text{mA}]$$

$$\frac{\partial K}{\partial A} = 0,147 - 0,00884 \cdot i = 0,039152 [\text{Eu} / \text{cm}^2]$$

Jetzt erfolgt die Umrechnung auf die Zeichenmaßstäbe der zwei Achsen x und y :

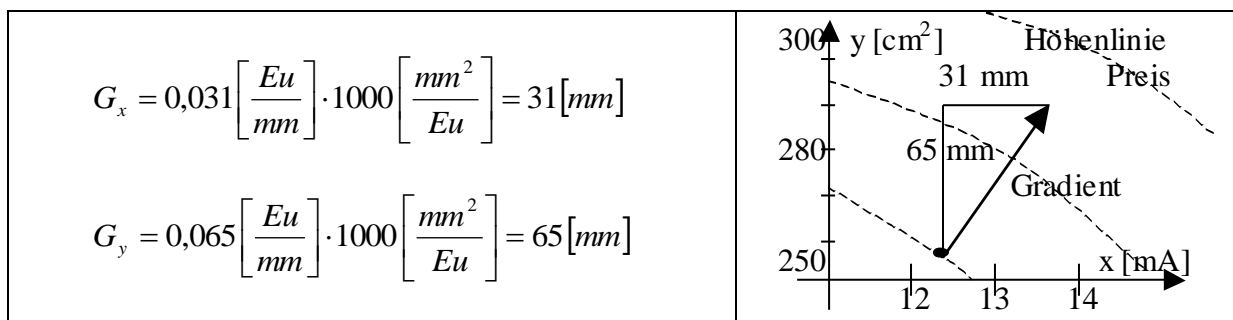
$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial i} \frac{di}{dx} = 1,07958 \left[\frac{\text{Eu}}{\text{mA}} \right] \cdot \frac{1}{34} \left[\frac{\text{mA}}{\text{mm}} \right] = 0,031 \left[\frac{\text{Eu}}{\text{mm}} \right] \quad \text{in x-Richtung}$$

$$\frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial K}{\partial A} \frac{dA}{dy} = 0,039152 \left[\frac{\text{Eu}}{\text{cm}^2} \right] \cdot \frac{1}{0,6} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{mm}} \right] = 0,085 \left[\frac{\text{Eu}}{\text{mm}} \right] \quad \text{in y-Richtung}$$

Da ein Euro/mm als graphische Länge nicht definiert ist, legen wir einfach willkürlich eine Skalierungskonstante für die Größe Eu/mm fest:

$$K = 1000 \left[\frac{\text{mm}}{\text{Eu} / \text{mm}} = \frac{\text{mm}^2}{\text{Eu}} \right]$$

Die graphischen Längen der Komponenten G_x und G_y unseres Gradientenvektors können wir nunmehr sowohl in x -Richtung als auch in y -Richtung in mm (oder wenn man will, in Bildschirmpixeln) angeben, d.h., wir können den Gradientenpfeil endlich zeichnen.



Zur Minimierung der Kosten muss man natürlich genau entgegengesetzt zum Gradienten gehen, denn dieser zeigt ja in die Richtung des stärksten Kostenanstiegs. **Der Gradient steht immer senkrecht auf der Höhenlinie, auf der er berechnet wird.**

12.4 Partielle Differenziation und Thermodynamik

Für z.B. ein Mol eines chemisch stabilen Gases sind Temperatur T , Druck p und Volumen V die Zustandsvariablen.

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p = konst} \quad \text{heißt isobarer Ausdehnungskoeffizient}$$

$$\beta = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V = konst} \quad \text{heißt isochorer Spannungskoeffizient}$$

$$\gamma = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T = konst} \quad \text{heißt isotherme Kompressibilität}$$

Nur 2 Zustandsvariable sind unabhängig, da z.B. für ideale Gase gilt

$$p = \frac{m \cdot R \cdot T}{V} \quad \text{mit} \quad m = \text{Molzahl} \quad \text{und} \quad R = \text{Gaskonstante}$$

Die Gesamtenergie U enthält Wärme- und mechanische Energie. Wir können jetzt willkürlich zwei der drei möglichen Zustandsvariablen auswählen, z.B. T und V und die Energie U als Funktion der beiden Zustandsgrößen auffassen, d.h. $U = U(T, V)$ schreiben. Damit ist das Totale Differenzial von U

$$(12.4.1) \quad dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right) dV$$

Eine Änderung dU von U kann als Änderung dQ der Wärmeenergie und/oder als Änderung dA der mechanischen Energie erfolgen.

$$(12.4.2) \quad dU = dQ + dA$$

Mechanische Energie ist hier bei den Gasen $A = p \cdot V$, d.h. Druck mal Volumen. Die Änderung der mechanischen Energie dA ist, da ein $V \cdot dp$ nicht auftritt (p ist nicht Zustandsvariable):

$$(12.4.3) \quad dA = -p \cdot dV$$

[J=Nm] [Pa=N/m²] [m³]

Das negative Vorzeichen entsteht dadurch, dass bei einer positiven Volumenänderung dV vom Gas Arbeit geleistet wird, die ihm verloren geht. Wir lösen Gl. (12.4.2) nach dQ auf und erhalten

$$dQ = dU - dA \quad \text{oder} \quad dQ = dU + p \cdot dV$$

Mit Carnot's Definition der Entropieänderung $dS = dQ / T$ erhalten wir

$$(12.4.4) \quad dS = \frac{dU + p \cdot dV}{T} \quad (\text{Nicolas Léonard Sadi Carnot 1796-1832})$$

Ein abgeschlossenes System ist in einen festen Kasten mit konstantem Volumen eingesperrt, aus dem keine Energie heraus und keine hinein kann, d.h. es gilt $V = \text{konst}$ und $U = \text{konst}$. Diese beiden Konstanten bestimmen die Maximalentropie bzw. Gesamtentropie S des Systems, die sich nach und nach einstellt, d.h. S hängt von U und V ab, oder anders ausgedrückt, S ist eine Funktion von U und V ($S = S(U, V)$). Rein formal ist das Totale Differenzial dS der Entropie dann

$$(12.4.5) \quad dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right) dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right) dV$$

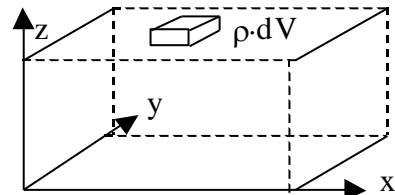
Vergleichen wir dieses Totale Differenzial mit Gl. (12.4.4), dann erhalten wir die Beziehungen

$$(12.4.5) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V = \text{konst}} = \frac{1}{T} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U = \text{konst}} = \frac{p}{T}$$

13. Mehrfachintegrale

13.1 Einführung

Wir stellen uns einen Quader vor mit Material, dessen Dichte ρ von Ort zu Ort schwankt, d.h., eine Funktion $\rho(x,y,z)$ ist. Nach Riemann denken wir uns den Quader in kleine Volumenelemente dV zerlegt, in denen wir die Dichte als einigermaßen konstant annehmen können.



Die Masse des i -ten Volumenelements ist dann $dM_i = \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot dV$

Die Summe aller Massen dM_i ergibt dann annähernd die Gesamtmasse M . Geht man zu infinitesimal kleinen Volumenelementen über, erhält man das Mehrfachintegral, sozusagen die exakte Lösung.

$$M = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

13.1 Konstante Integrationsgrenzen

Dies ist der einfachste Fall. Die entsprechenden Körper sind im Falle der

- Kartesische Koordinaten $\leftarrow \rightarrow$ der Quader
- Zylinderkoordinaten $\leftarrow \rightarrow$ der Zylinder, Zylindrische Ringe, Segmente
- Kugelkoordinaten $\leftarrow \rightarrow$ die Kugel, Kugelschalen, Segmente

Beispiel CO₂-Masse in einem Luftquader.

Die Dichte nehme in Ostrichtung ($0 \leq x \leq a$) mit Anstieg k_1 zu
 In Nordrichtung ($0 \leq y \leq b$) mit Anstieg k_2 ab
 Nach oben ($0 \leq z \leq H$) barometrisch ab

$$M = \int_0^H \int_0^b \int_0^a (\rho_0 + k_1 x - k_2 y) e^{-\alpha z} dx dy dz$$

Wird z.B. zuerst über z integriert, dann werden die Variablen x und y wie Konstanten behandelt, ähnlich wie in der partiellen Differenziation. Nach der Integration über z haben wir

$$M = \int_0^b \int_0^a (\rho_0 + k_1 x - k_2 y) \left[\frac{e^{-\alpha z}}{-\alpha} \right]_0^H dx dy$$

Wir setzen die Grenzen 0 und H für z ein und erhalten einen konstanten Klammerausdruck, den wir, da er multiplikativ auftritt, vor das Integral ziehen dürfen:

$$M = \int_0^b \int_0^a (\rho_0 + k_1 x - k_2 y) \left(\frac{e^{-\alpha H}}{-\alpha} - \frac{1}{-\alpha} \right) dx dy$$

Die nächste Integration lassen wir über y laufen, wobei x wie eine Konstante behandelt wird:

$$M = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha H}}{\alpha} \right) \int_0^a \left[\rho_0 y + k_1 x y - \frac{k_2 y^2}{2} \right]_0^b dx$$

Wir setzen die Grenzen 0 und b in die eckige Klammer ein und erhalten:

$$M = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha H}}{\alpha} \right) \int_0^a \left(\rho_0 b + k_1 b x - \frac{k_2 b^2}{2} - 0 \right) dx$$

Es ist ein gewöhnliches Integral über x daraus geworden, das wir integrieren:

$$M = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha H}}{\alpha} \right) \left[\rho_0 b x + \frac{k_1 b x^2}{2} - \frac{k_2 b^2 x}{2} \right]_0^a$$

Wir setzen die Grenzen 0 und a für x ein und erhalten die Formel für die Masse:

$$M = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha H}}{\alpha} \right) \left[\rho_0 b a + \frac{k_1 b a^2}{2} - \frac{k_2 b^2 a}{2} \right]$$

Produktzerlegung: Noch einfacher wird die Integration mit konstanten Grenzen, wenn der Integrand sich als Produkt von Teilfunktionen schreiben lässt, wobei jede Teilfunktion nur von einer der Veränderlichen abhängt, z.B. $f(x,y,z) = g(x) \cdot h(y) \cdot m(z)$. In diesem Falle

wird das 3-fach-Integral zum Produkt von drei einfachen Integralen, die wir einzeln integrieren und die berechneten Zahlen dann multiplizieren

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy \cdot \int_e^f m(z) dz$$

13.2 Integrieren auf einer Ebene mit Polarkoordinaten

Polarkoordinaten $r, \phi \leftrightarrow$ Kartesische Koordinaten x, y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \arctan(y/x) \quad !!!$ (!!! Bei $x < 0$ zum Winkel π oder 180° addieren)	
--	--

Ein Winkel ϕ in Radiant ist das Verhältnis von Bogenstrecke s zum Radius r , d.h. $\phi = s / r$	Ein Flächenelement dA bei kartesischen Koordinaten ist Länge mal Breite, d.h. $dA = dx \cdot dy$	Polarkoordinaten: Kreisbogen = Radius \cdot Winkel, d.h. Kreisbogen = $r \cdot d\phi$, und damit das Flächenelement $dA = r \cdot d\phi \cdot dr$

Beispiel: Auf einer Kreisscheibe mit Radius R nehme die Flächenbelegung mit Aluminium in Mikrogramm pro Quadratcentimeter vom Zentrum nach außen hin linear ab:

$$\rho(r, \phi) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \left[\frac{\mu g}{cm^2} \right]$$

Wie man sieht, hängt die Dichte ρ nur vom Abstand r vom Zentrum ab und nicht vom Winkel ϕ , mit dem man das Zentrum umrundet. Der Radius der Scheibe ist $R = 12$ cm. Die Dichte im Zentrum ist $\rho_0 = 800$ [$\mu g / cm^2$]. Die Gesamtmasse M an Aluminium auf der Scheibe ist das 2-fach-Integral über alle Flächenelemente $dA = r d\phi dr$, wobei über r und über ϕ integriert wird. Bei der ersten Integration, der über den Winkel ϕ von 0 bis 2π wird r wie eine Konstante behandelt.

$$M = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r dr d\phi = \int_0^R \left[\rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r \cdot \phi \right]_0^{2\pi} dr$$

Wir multiplizieren das r , das vom Ausdruck für das Flächenelement stammt, in den Integranden hinein, und wir setzen in die eckige Klammer die Grenzen 0 und 2π ein und erhalten die multiplikative Konstante 2π , die wir zusammen mit der Konstanten ρ_0 vor das Integralzeichen ziehen können.

$$M = \int_0^R \left(\rho_0 \left(r - \frac{r^2}{R} \right) \cdot 2\pi - 0 \right) dr = 2\pi \cdot \rho_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R} \right) dr$$

Die Integration über r ist wieder ein einfaches Integral. Wir erhalten:

$$M = 2\pi \rho_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3 \cdot R} \right]_0^R = 2\pi \rho_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3} \right) = 2\pi \rho_0 \frac{R^2}{6}$$

Setzen wir die Zahlen $R = 12 \text{ cm}$ und $\rho_0 = 800 \text{ } [\mu\text{g} / \text{cm}^2]$ ein, erhalten wir die Alumasse:

$$M = 2\pi \cdot 800 \cdot (12^2 / 6) = 120637 \text{ } [\mu\text{g}] \cong 0,12 \text{ g}$$

13.3 Integration eines Zylinders mit Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten

<p>Zylinderkoordinaten \leftrightarrow Kartesische Koordinaten</p> $r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r \cdot \cos(\phi)$ $\phi = \arctan(y/x) \quad !!! \qquad y = r \cdot \sin(\phi)$ <p>(!!! Wenn $x < 0$, dann π oder 180° zu α addieren)</p> $z = z \qquad z = z$	
--	--

<p>Das Volumenelement bei Zylinderkoordinaten ist ein kleiner Ausschnitt aus einem Kreisring der Höhe dz, der Dicke dr und der Länge $r \cdot d\phi$ (Wegen <i>Bogen = Winkel mal Radius</i>) Das Volumenelement ist somit $dV = r \, d\phi \, dr \, dz$</p>	
--	--

Beispiel: Masse der Schaumfüllung eines rotierend ausgeschäumten Zylinders.

<p>Durch die Zentrifugalkraft des rotierenden Zylinders ist der Schaum am Außenmantel dichter als im Zentrum (außen Dichte $\rho_R = 72 \text{ } [\text{Kg}/\text{m}^3]$, im Zentrum $\rho_0 = 6 \text{ } [\text{Kg}/\text{m}^3]$, Höhe $H = 0,3 \text{ } [\text{m}]$, Radius $R = 0,12 \text{ } [\text{m}]$. Gesucht ist die Masse M der Schaumfüllung.</p>	
---	--

Die Integration geht über die Variablen ϕ, r, z mit den Grenzen $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq H$. Die lineare Funktion $\rho(r)$ ist, wie man leicht nachprüfen kann mit $r = 0$ und $r = R$,

$$\rho(r) = \left(\rho_0 + \frac{\rho_R - \rho_0}{R} \cdot r \right) = 6 + \frac{72 - 6}{0,12} \cdot r = 6 + 550 \cdot r.$$

Die erste Integration führen wir wieder über dem Winkel ϕ aus, und auch hier können wir das r aus dem Volumenelement zum Integranden dazuschlagen

$$M = \int_0^H \int_0^R \int_0^{2\pi} (6 + 550 \cdot r) r \, d\phi \, dr \, dz = \int_0^H \int_0^R \left[(6r + 550r^2) \phi \right]_0^{2\pi} dr \, dz$$

Wir setzen die Grenzen 0 und 2π in die eckige Klammer ein und erhalten Faktor 2π . Diesen Faktor ziehen wir vor das Integral und integrieren anschließend über r .

$$M = 2\pi \int_0^H \left[\frac{6r^2}{2} + \frac{550r^3}{3} \right]_0^R dz = 2\pi \int_0^H \left(\frac{6R^2}{2} + \frac{550R^3}{3} \right) dz$$

Die runde Klammer ist eine Konstante. Wir können die Zahl ausrechnen mit $R = 0,12$ und erhalten den Wert 0,36. Wir setzen diesen Wert statt der Klammer ein, und erhalten so als Ergebnis der letzten Integration mit $H = 0,3$ die Schaummasse M im Zylinder:

$$M = 2\pi \int_0^H 0,36 dz = 2\pi [0,36 \cdot z]_0^H = 2\pi 0,36 H = 0,678 [Kg]$$

13.4 Integration mit Kugelkoordinaten

<p>Kugelkoordinaten \leftrightarrow Kartesische Koordinaten</p> <p>r = Radius x, y, z</p> <p>ϕ = Meridian (Längengrad)</p> <p>θ = Polwinkel (Breitengrad)</p> <p>(Hier wurde die negative y-Achse gezeichnet)</p>	
--	--

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \arctan(y/x) \quad !!!$$

(!!! Wenn $x < 0$, dann π oder 180° zu α addieren)

$$\theta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$x = r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi)$$

$$y = r \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\phi)$$

$$z = r \cdot \sin(\theta)$$

<p>Man denkt sich die Kugel aus Schichten der Dicke dr zusammengesetzt. Aus einer Kugelschicht schneidet man das Volumenelement der Breite $r_0 d\phi$ und der Länge $r d\theta$ heraus (das r tritt immer wegen <i>Bogenstrecke = Radius mal Winkel</i> auf). Damit wird das Volumenelement $dV = r d\theta r_0 d\phi dr$ und wegen $r_0 = r \cos(\theta)$ $dV = r^2 \cos(\theta) dr d\phi d\theta$</p>	
---	--

Beispiel: Schätzung der Erdmasse

Die Erde ist nach den Vorschriften der Französischen Revolution eine Kugel mit dem Umfang 40.000 Km. Außen besteht die Erde fast nur aus Wasser (Dichte $1 [g/cm^3]$ bzw. $1000 [Kg/m^3]$). Im Zentrum sollen sich (entgegen der landläufigen Meinung) bei uns die schweren Elemente Gold und Platin sammeln (Dichte etwa $20 [g/cm^3]$ bzw. $20.000 [Kg/m^3]$). Weiterhin nehmen wir an, dass die Dichte zum Zentrum hin linear wächst. Wir erhalten für

die Dichtefunktion $\rho(r) = 20000 - (19000/R)r$, wie man leicht nachprüfen kann, indem man mal $r=0$ und $r=R$ in die Gleichung einsetzt. Dazwischen läuft die Funktion linear, da sie vom Typ $y = a + bx$ ist, d.h. eine Geradengleichung. Unser Dreifachintegral summiert alle Volumenelemente dV , wobei bei festen Integrationsgrenzen die Reihenfolge der Integrationen beliebig ist. Der Radius r läuft von 0 bis R , der Meridianwinkel ϕ von 0 bis 2π (Vollkreis um die Erdachse), der Polwinkel θ von $-\pi/2$ (Südpol) bis $+\pi/2$ (Nordpol).

$$M = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \rho(r) r^2 \cos(\theta) d\theta d\phi dr$$

Wir integrieren hier zuerst über den Radius r . Die Winkel ϕ und θ werden dabei wie Konstanten behandelt. Für $\rho(r)$ setzen wir unsere Geradengleichung $20000 - (19000/R)r$ ein. Das r^2 aus dem Volumenelement müssen wir zum Integranden dazuschlagen, so dass wir die Gleichung $20000r^2 - (19000/R)r^3$ zu integrieren haben. Wenn θ hier als Konstante behandelt wird, dann auch $\cos(\theta)$. Die erfolgte Integration steht in der eckigen Klammer:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[\frac{20000r^3}{3} - \frac{19000r^4}{4R} \right]_0^R \cos(\theta) d\theta d\phi$$

Wir setzen die Grenzen 0 und R in die eckige Klammer ein und erhalten in der eckigen Klammer einen konstanten Ausdruck mit dem Zahlenwert $1916,67 \cdot R^3$, den wir, da er multiplikativ auftritt, vor das Integral ziehen dürfen.

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\frac{20000R^3}{3} - \frac{19000R^4}{4R} \right) \cos(\theta) d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1916,67 \cdot R^3 \cdot \cos(\theta) d\theta d\phi$$

Als nächste Integration wählen wir die über ϕ . Auch hier wird θ und damit auch $\cos(\theta)$ als Konstante behandelt. Wir setzen die Grenzen von ϕ in die eckige Klammer ein und erhalten den konstanten Faktor 2π , den wir ebenfalls vor das Integral ziehen.

$$M = 1916,67 R^3 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[\cos(\theta) \cdot \phi \right]_0^{2\pi} d\theta = 1916,67 R^3 \cdot 2\pi \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(\theta) d\theta$$

Die letzte Integration erfolgt über θ . Der Kosinus integriert ergibt den Sinus. Mit $\sin(\pi/2)=1$ und $\sin(-\pi/2)=-1$ entsteht noch einmal ein Faktor, hier mit Wert 2.

$$M = 2\pi \cdot 1916,67 \cdot R^3 \left[\sin(\theta) \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2\pi \cdot 1916,67 \cdot R^3 (1 - (-1)) = 2\pi \cdot 1916,67 \cdot R^3 \cdot 2$$

Mit $R = 40.000.000 / (2\pi) = 4 \cdot 10^7 / (2\pi)$ erhalten wir die geschätzte Erdmasse zu

$$M = 2\pi \cdot 1916,67 \cdot \left(\frac{4 \cdot 10^7}{2\pi} \right)^3 \cdot 2 = 6,214 \cdot 10^{24} \text{ [Kg]}$$

Die Schätzung der Astronomen, Astrophysiker und Physiker ist $5,979 \cdot 10^{24}$ [Kg], also lediglich eine Abweichung von 4% für unser primitives Erdmodell.

13.5 Trägheitsmomente

Als Drehimpuls D bezeichnet man das Bestreben einer rotierenden Masse, ihre Rotation beizubehalten. Trägheitsmoment Θ (sprich „T“ oder „Teta“) ist Teil des Drehimpulses. Die Größe *Trägheitsmoment* taucht überall dort auf, wo sich Massen drehen (Maschinenbau, Astronomie, Atomphysik). Es gibt enge Analogien zwischen der geradlinigen Bewegung und der rotierenden Bewegung von Massen.

Größe	Geradlinige Bewegung	Rotation
Geschwindigkeit	v [m / s]	ω [Rad / s] bzw. [1 / s]
Impuls	$I = m \cdot v$ [Kg m / s]	$D = \Theta \cdot \omega$ [Kg m ² / s]
Masse	m [Kg]	Θ [Kg m ²]
Energie	$E = \frac{m}{2} v^2 = \frac{I \cdot v}{2} \left[\frac{Kg m^2}{s^2} \right]$	$E = \frac{\Theta}{2} \omega^2 = \frac{D \omega}{2} \left[\frac{Kg m^2}{s^2} \right]$

Eher zufällig, aber nicht unwichtig, ist das Auftreten einer Größe **Flächenträgheitsmoment**, die ähnlich dem Trägheitsmoment von Rotationskörpern berechnet wird. Das Flächenträgheitsmoment spielt in der Elastizitätstheorie bei der Berechnung von Balkenbiegungen eine Rolle.

<p>Balkenbiegung nach Bernoulli : Im ersten Fall denkt man sich den Balken links starr befestigt. Rechts wird er belastet und biegt sich nach unten. Die Strecke z, um die sich das Balkenende senkt, berechnete Bernoulli.</p>	
--	--

(Jakob Bernoulli, Schweizer Mathematiker und Physiker, 1654-1705, einer von 8 berühmten Bernoullis)

Nach Bernoulli ist
$$z = - \frac{L}{\varepsilon \Theta} \frac{a^3}{3} \tag{13.5.1}$$

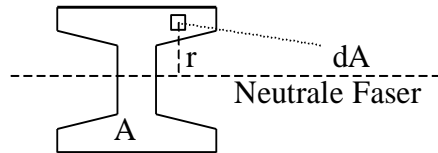
Θ = Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts in [m⁴]
 ε = Elastizitätsmodul [N / m²] (z.B. hat Stahl etwa $\varepsilon = 2 \cdot 10^{11}$ [N / m²]) Diese Größe folgt aus der Gleichung $F = \varepsilon A \cdot (da/a)$, wobei F eine Zugkraft in [N] ist, A die Querschnittsfläche in [m²], (da/a) die relative Längenänderung der belasteten Probe)
 L = Last, die den Balken biegt, in [N]
 a = Balkenlänge in [m]

<p>Im Fall 2 nach Bernoulli liegt der Balken an den Enden auf und wird in der Mitte belastet. Die Berechnung erfolgt wie oben. Man rechnet mit der halben Last an jedem Ende.</p>	
---	--

<p>Berechnung des Massenträgheitsmomentes</p> $\Theta = \iiint_V \rho \cdot r^2 dV$ <p>r = Abstand zur Drehachse, ρ = Dichte</p>	
--	--

Berechnung des **Flächenträgheitsmomentes**

$$\Theta = \iint_A r^2 dA$$

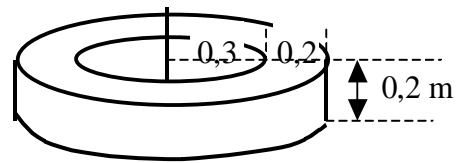


Beispiel: Bewegungsenergie einer Schwungscheibe

Um bei Bergwerkslokomotiven auf den gefährlichen Stromabnehmer (Funkengefahr) verzichten zu können, kamen findige Ingenieure auf die Idee, die Energie in einer Schwungscheibe zu speichern. Diese wird in Förderkorbnähe, wo immer frische Luft ist und keine Explosionsgefahr besteht, mit einem Elektromotor in Schwung gebracht.

Dichte ρ des Materials $\rho = 7800 \text{ [Kg/m}^3\text{]}$
 Frequenz $f = 20.000 \text{ [U/min]}$

Gesucht ist die Energie $E \text{ [KWh]}$???
 Achse und Speichenscheibe vernachlässigen wir



Hinweis: Massenträgheitsmomente immer zuerst mit Zylinderkoordinaten probieren

Das Volumenelement der Zylinderkoordinaten war $dV = r d\phi dr dz$. Bei unserer Schwungscheibe, eigentlich ein fester Stahling, läuft r von 0,3 bis 0,5 [m], Winkel ϕ läuft einmal rund, d.h. von 0 bis 2π , Höhe z läuft von 0 bis 0,2 [m]. Damit wird das Trägheitsmoment

$$(13.5.2) \quad \Theta = \int_{z=0}^{0,2} \int_{r=0,3}^{0,5} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho r^2 r d\phi dr dz = \iiint \rho r^3 d\phi dr dz$$

Da wir feste Grenzen haben, ist die Reihenfolge der Integrationen beliebig. Wir integrieren zuerst über den Winkel ϕ . Dabei entsteht der Faktor 2π , den wir zusammen mit dem ρ vor das Integral ziehen.

$$(13.5.3) \quad \Theta = \rho \int_{z=0}^{0,2} \int_{r=0,3}^{0,5} \left[r^3 \cdot \phi \right]_0^{2\pi} dr dz = 2\pi \rho \int_0^{0,2} \int_{0,3}^{0,5} r^3 dr dz$$

Die nächste Integration lassen wir über r laufen. Setzen wir die Grenzen 0,3 und 0,5 ein, entsteht in der eckigen Klammer ein konstanter Ausdruck mit dem Wert 0,0136. Wir lassen ihn im Integral.

$$\Theta = 2\pi \rho \int_0^{0,2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{0,3}^{0,5} dz = 2\pi \rho \int_0^{0,2} \left(\frac{0,5^4}{4} - \frac{0,3^4}{4} \right) dz$$

Die letzte Integration erfolgt über die Höhe z , wobei in der eckigen Klammer ein weiterer Faktor 0,2 hinzukommt.

$$\Theta = 2\pi \rho \int_0^{0,2} 0,0136 dz = 2\pi \rho [0,0136 \cdot z]_0^{0,2} = 2\pi \rho \cdot 0,0136 \cdot 0,2$$

$$\Theta = 2\pi \cdot 7800 \cdot 0,0136 \cdot 0,2 = 133,30 \text{ [Kg m}^2\text{]}$$

Wir berechnen jetzt aus der Umdrehungsfrequenz f die Kreisfrequenz ω .

$$\text{Frequenz } f = 20.000 \text{ U/min} \rightarrow f = 20.000 / 60 \text{ U/s} = 333,33 \text{ U/s} \quad \omega = 2\pi f = 2094,4 \text{ [1/s]}$$

$$\text{Energie } E = (\Theta \omega^2) / 2 = (133,33 \cdot 2094,4^2) / 2 = 2,924 \cdot 10^8 \text{ [Kg m}^2\text{/s}^2 = \text{Nm} = \text{Ws}]}$$

$$1 \text{ KWh} = 1000 \cdot 3600 \text{ [Ws]} \quad \text{und damit} \quad E = \frac{2,924 \cdot 10^8}{3,6 \cdot 10^6} = 81,2 \text{ [KWh]}$$

Mit dieser Energie könnte ein Auto etwa 3 Stunden über die Autobahn fahren.

13.6 Mehrfachintegrale mit variablen Integrationsgrenzen

Unter variablen Integrationsgrenzen versteht man solche, bei denen als Grenzen nicht nur Konstanten auftreten, sondern auch Ausdrücke, die von den Integrationsvariablen abhängen. Nicht als variabel gelten Hinweise auf die Integrationsvariable, der das Integralzeichen zugeordnet ist (siehe z.B. Gl. 13.5.2 oder 13.5.3).

Beispiel: Trägheitsmoment eines hohlen Kegelstumpfes

<p>Drehachse ist die z-Achse, ρ = Dichte $R1$ = Innendradius $R2$ = Oberer Außenradius $R3$ = Unterer Außenradius H = Kegelstumpfhöhe dV = Volumenelement mit $dV = r d\phi dr dz$ und den Koordinaten r, ϕ, z ϕ = Medianwinkel (wird ab x-Achse gezählt)</p>	<p>Das Diagramm zeigt einen hohlen Kegelstumpf, der um die z-Achse gedreht wird. Die z-Achse verläuft durch die Mitte des Stumpfes. Die x- und y-Achsen sind im Ursprung eingezeichnet. Die Höhe des Stumpfes ist mit H bezeichnet. Die Radien sind wie folgt definiert: R1 ist der innere Radius an der Oberen Basis, R2 ist der äußere Radius an der Oberen Basis, und R3 ist der äußere Radius an der unteren Basis. Ein kleiner rechteckiger Volumenelement dV ist an einer Höhe z und einem Radius r eingezeichnet. Der Winkel phi ist der Winkel zur x-Achse im xy-Ebene.</p>
--	---

Zahlenwerte für die Konstanten sind:

$$R1 = 1 \text{ [m]}, \quad R2 = 1,4 \text{ [m]}, \quad R3 = 1,9 \text{ [m]} \\ H = 0,3 \text{ [m]}, \quad \rho = 7800 \text{ [Kg/m}^3\text{]}$$

ϕ läuft von 0 bis 2π

z läuft von 0 bis H

Die obere Grenze der Integrationsvariablen r ist die schräge Außenwand. Am Boden des Kegelstumpfes läuft r vom Innenradius $R1$ bis zum unteren Außenradius $R3$. Oben läuft r hingegen vom Innenradius $R1$ nur bis zum oberen Außenradius $R2$. Bei einer Höhe z des Volumenelements dazwischen liegt die obere Begrenzung für r auf einer schrägen Geraden, d.h.

$$r \text{ läuft von } R1 \text{ bis } R3 - \left(\frac{R3 - R2}{H} \right) \cdot z, \quad \text{und hat damit eine variable obere}$$

Grenze. Setzt man für z mal 0, mal H ein, dann erkennt man die Richtigkeit der Formel.

Da der Klammerausdruck $(R_3 - R_2) / H = (1,9 - 1,4) / 0,3 = 1,667$ ist, lässt sich die variable obere Grenze auch schreiben als

$$1,9 - 1,667 \cdot z \quad (\text{eine Geradengleichung})$$

Damit wird das Dreifachintegral des Trägheitsmomentes

$$\Theta = \iiint_V \rho r^2 dV = \int_{z=0}^{0,3} \int_{r=1,0}^{1,9-1,667 \cdot z} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho r^2 r d\phi dr dz$$

Zur Erinnerung: Die Angaben $z = 0$, $r = 1,0$ oder $\phi = 0$ bei den unteren Integrationsgrenzen bedeutet nicht, dass die unteren Grenzen variabel sind, sondern sind nur ein Hinweis darauf, über welche Variable bei diesem Teilintegral integriert wird.

Die Reihenfolge der Integrationen ist nicht mehr beliebig

- Suche eine Variable, die nicht in einer Grenze auftritt.** In unserem Beispiel haben wir dafür r und ϕ zur Auswahl, da sie beide nicht in einem variablen Ausdruck einer Grenze auftreten. Einzig Variable z tritt in der oberen Grenze für r auf.
- Löse das Integral für die ausgewählte Variable und setze die Grenzen in die eckige Klammer ein.** Die Zahl der Integrale hat sich damit um eines verringert. **Wiederhole die Punkte a und b bis alle Integrale gelöst sind.**

Punkt a: Wir wählen als erste Integration die über ϕ .

Punkt b: Wir integrieren über ϕ . Die Konstant ρ ziehen wir gleich vor das Integral. Das r aus dem Ausdruck für das Volumenelement schlagen wir zum r^2 der Θ -Formel dazu, so dass unser Integrand jetzt ρr^3 lautet. Bei der Integration über ϕ entsteht der Faktor 2π , den wir ebenfalls vor das Integral ziehen.

$$\Theta = \rho \int_{z=0}^{0,3} \int_{r=1,0}^{1,9-1,667 \cdot z} \int_0^{2\pi} [r^3 \cdot \phi] dr dz = 2\pi \rho \int_{z=0}^{0,3} \int_{r=1,0}^{1,9-1,667 \cdot z} r^3 dr dz$$

Punkt a: Wir müssen jetzt über r integrieren. Die Variable r tritt im Gegensatz zu z nicht in einem variablen Ausdruck in einer Grenze auf.

Punkt b:

$$\Theta = 2\pi \rho \int_{z=0}^{0,3} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{1,0}^{1,9-1,667z} dz = 2\pi \rho \int_{z=0}^{0,3} \left(\frac{(1,9-1,667 \cdot z)^4}{4} - \frac{1,0}{4} \right) dz$$

Punkt a: Wir haben nur noch das einfache Integral über z zur Auswahl.

Punkt b: Zur Vereinfachung ziehen wir den Faktor $1/4$ aus der Klammer vor das Integral.

$$\Theta = \frac{2\pi \rho}{4} \int_{z=0}^{0,3} ((1,9-1,667 \cdot z)^4 - 1) dz = \frac{\pi \rho}{2} \left[\frac{(1,9-1,667 \cdot z)^5}{5 \cdot (-1,667)} - z \right]_0^{0,3}$$

oder

$$\Theta = \frac{\pi \cdot 7800}{2} \left(\frac{(1,9 - 1,667 \cdot 0,3)^5}{-5 \cdot 1,667} - 0,3 - \left(\frac{1,9^5}{-5 \cdot 1,667} - 0 \right) \right)$$

oder

$$\Theta = 12252 \cdot (-0,6453 - 0,3 + 2,9713) = 24823 \text{ [Kg m}^2\text{]}$$

Beispiel: Trägheitsmoment einer Kugel

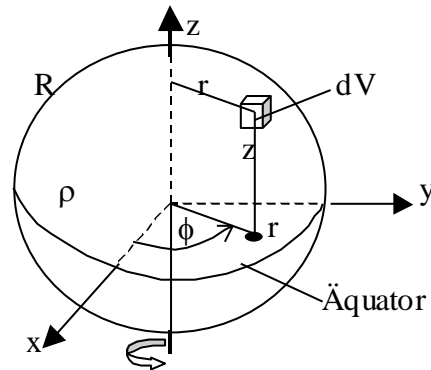
Bei Trägheitsmomenten immer zuerst mit Zylinderkoordinaten probieren, da diese eine natürliche Drehachse haben.

Drehachse ist die z-Achse, ρ = Dichte

R = Radius

dV = Volumenelement mit $dV = r \, d\phi \, dr \, dz$
und den Koordinaten r, ϕ, z

ϕ = Medianwinkel (wird ab x-Achse gezählt)



ϕ läuft von 0 bis 2π (ein Mal im Kreis)

z läuft von $-R$ bis $+R$ (vom Südpol zum Nordpol)

Die obere Grenze der Integrationsvariablen r ist die gebogene Außenwand der Kugel. Am Südpol und am Nordpol läuft r von 0 bis 0, d.h. kein Stück. In Äquatorhöhe läuft r von der Achse bis zum Äquator, d.h. von 0 bis R . Bei einer beliebigen Höhe z des Volumenelements dazwischen liegt die obere Begrenzung für r auf einem Halbkreis, d.h.

r läuft von 0 bis $r_{obGr} = \sqrt{R^2 - z^2}$, und hat damit eine variable obere Grenze.

Setzen wir für z mal $-R$, mal $+R$ oder mal 0 ein, dann erkennen wir, dass die Formel zumindest am Südpol, am Nordpol und am Äquator stimmt. Der Wurzelausdruck folgt aus der Gleichung $R^2 = z^2 + r^2$ für einen Halbkreis mit der senkrechten Sehne $2R$ auf der z -Achse und der auf der Sehne senkrecht angetragenen Höhe r , die somit waagrecht zu zeichnen ist. Damit wird unser Dreifachintegral

$$\Theta = \iiint_V \rho r^2 \, dV = \int_{z=-R}^R \int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho r^2 \, r \, d\phi \, dr \, dz$$

Punkt a: Wir haben für die erste Integration die beiden Variablen r und ϕ zur Auswahl, da beide nicht in einer variablen Grenze auftreten.

Punkt b: Wir ziehen die Konstante ρ vor das Integral und schlagen das r aus dem Volumenelement zum r^2 der Θ -Formel, d.h., wir erhalten als Integranden den Ausdruck r^3 . Wir wählen ϕ als erste Integrationsvariable. Es entsteht der Faktor 2π , den wir vor das Integral ziehen.

$$\Theta = \rho \int_{z=-R}^{+R} \int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \left[r^3 \cdot \phi \right]_0^{2\pi} dr dz = 2\pi \rho \int_{z=-R}^{+R} \int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3 dr dz$$

Punkt **a**: Wir müssen jetzt über r integrieren, da es die einzige der beiden Variablen r und z ist, die nicht in einer variablen Grenze vorkommt.

Punkt **b**: Wir integrieren über r und setzen die Grenzen 0 und $\sqrt{R^2 - z^2}$ in die eckige Klammer ein.

$$\Theta = 2\pi \rho \int_{z=-R}^R \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dz = 2\pi \rho \int_{z=-R}^R \left(\frac{(\sqrt{R^2-z^2})^4}{4} - 0 \right) dz$$

oder

$$\Theta = \frac{\pi \rho}{2} \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{\pi \rho}{2} \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz$$

oder

$$\Theta = \frac{\pi \rho}{2} \left[R^4 z - \frac{2R^2}{3} z^3 + \frac{z^5}{5} \right]_{-R}^R = \frac{\pi \rho R^5}{2} \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) = \pi \rho R^5 \left(\frac{8}{15} \right).$$

mit der Dimension [Kg m²].

14. Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen beschreiben das Verhalten technischer oder biologischer Modellsysteme über der Zeit und/oder im Raum verteilt. Die Lösung einer Differentialgleichung ist demnach kein einzelner Zahlenwert, sondern z.B. eine Bahnkurve, eine Wachstumskurve oder eine sich mit der Zeit ändernde Konzentrationsverteilung.

Gleichungen, die Ableitungen enthalten und deren Lösung eine Funktion (nicht ein Wert) ist, sind Differenzialgleichungen. Ihre allgemeine Form ist

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Beispiele :

- | | |
|---|--|
| (1) $y' = 2x$ | Diese sehr einfache DGL liefert eine Parabel |
| (2) $y'(x) = y(x)$ | Diese liefert eine e-Kurve (Wachstumskurve) |
| (3) $\dot{y}(t) = \frac{y_B - y(t)}{T}$ | Diese liefert ebenfalls eine e-Kurve, aber fallend |

Jede Funktion $y(x)$ bzw. $y(t)$, die die DGL erfüllt, heißt **Lösung**. So ist z.B. die Funktion

$y(x) = x^2 + 7$ mit der Ableitung $y'(x) = 2x$ eine Lösung der DGL (1)
oder

$y(x) = 90 e^x$ mit der Ableitung $y'(x) = 90 e^x$ eine Lösung der DGL (2).

Lösungsfunktionen findet man

- (1) Numerisch punktweise als Graphik oder Wertetabelle mit dem Euler-Cauchy-Verfahren, dem Runge-Kutta-Verfahren oder einem anderen numerischen Lösungsverfahren
- (2) Algebraisch nach verschiedenen Methoden. Jeder DGL-Typ hat besonders günstige Methoden, die man anwenden sollte.

14.1 Numerische Lösung einer DGL nach Euler

Das Verfahren beruht darauf, dass man in einem Startpunkt x_0 mit Hilfe der DGL den Anstieg der Lösungskurve in diesem Punkt berechnet, ein kleines Stück Lösung zeichnet, d.h. ein winziges Geradenstück. Dieses kleine Geradenstück führt zum nächsten Punkt, den man nunmehr zum Ausgangspunkt des nächsten kleinen Schrittes macht, usw. Wegen $\dot{x} = dx/dt$ wird $dx = \dot{x} \cdot dt$, d.h. wir können die Änderung dx ausrechnen aus \dot{x} und einem willkürlich festzulegenden Schritt dt der unabhängigen Variablen. Den Wert von \dot{x} liefert uns die DGL. Die unabhängige Variable t lässt man meistens bei $t = 0$ starten. Die Schrittweite dt wählt man sehr klein, sonst wird die numerische Lösung zu ungenau.

Beispiel: $2\dot{x}(t) + 3x(t) = 0$ oder $\dot{x}(t) = -\frac{3}{2}x(t)$

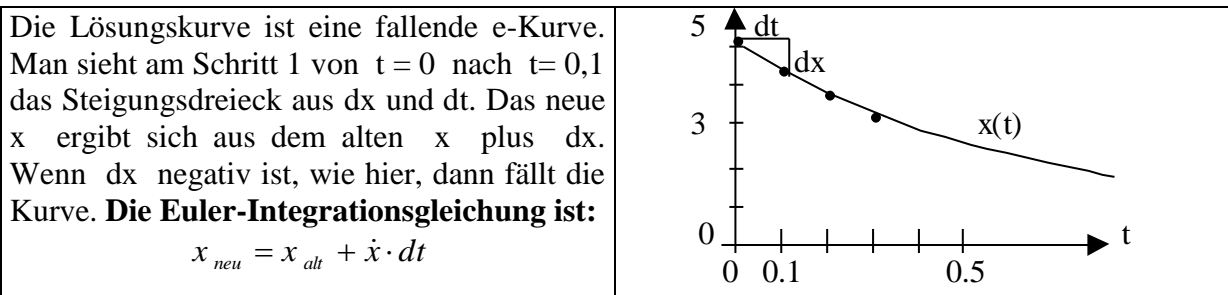
Startwert $x_0 = 5$ \rightarrow $\dot{x}_0 = -\frac{3}{2} \cdot 5 = -7,5$

Mit Schrittweite $\Delta t = 0,1$ [s] \rightarrow $x_1 = x_0 + \dot{x} \cdot \Delta t$

$x_1 = 5 - 7,5 \cdot 0,1 = 4,25$ \rightarrow $\dot{x}_1 = -\frac{3}{2} \cdot 4,25 = -6,37$

$x_2 = 4,25 - 6,37 \cdot 0,1 = 3,61$ \rightarrow $\dot{x}_2 = -\frac{3}{2} \cdot 3,61 = -5,41$

$x_3 = 3,61 - 5,41 \cdot 0,1 = 3,07$ usw.



14.2 Klassifikation der DGL

Typ	Eigenschaft	Beispiel
gewöhnliche DGL	Nur eine unabhängige Variable	$y''(t) + y(t) = 0$
partielle DGL	Mehrere unabhängige Variable z.B. x und t	$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0$
n-ter Ordnung	Bis zur n-ten Ableitung	$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_0 y(t) = 0$
linear	Keine Potenzen oder Produkte der y	$y''(x) + 7 y(x) = 0$
nichtlinear	Potenzen oder Produkte der y	$y(x) y'(x) - 7 y^2(x) = 0$
Nichtkonstante Koeff	Auftreten nichtkonst. Koeffizienten	$x \cdot y''(x) + (1-x^2) \cdot y'(x) = 0$
inhomogen	Mit Störfunktion f(x) rechts statt 0	$A y'(x) + b y(x) = x^2$
DGL-System	Gekoppelte DGL z.B. für y und z	$y'(x)z(x) - y(x) = 0$ $z'(x) + y(x) = 0$

14.3 Algebraische Lösung von DGL

Zuerst einige Begriffsbestimmungen:

Eine spezielle Lösung ist eine eindeutige Kurve mit einem Startwert. Z.B. startet die Kurve $y(x) = x^2 + 7$ im Punkt (0 ; 7)

Eine Allgemeine Lösung ist eine Lösungsformel mit freien Konstanten. Erst wenn man den Konstanten Werte zuweist, erhält man eine zeichenbare Kurve. Z.B. kann niemand die Kurve $y(x) = A x^2 + B x + C$ zeichnen, wenn er die Werte von A, B, C nicht hat.

Merke: Numerische Lösungen sind immer spezielle Lösungen

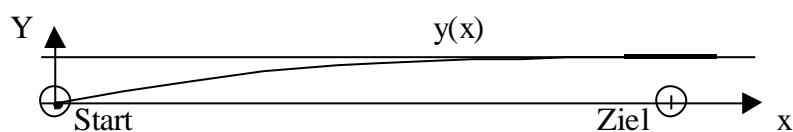
Anfangswerte: Die Definitionsformel einer DGL,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) ,$$

zeigt, dass man zur Berechnung der n-ten Ableitung die Werte von $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ in die Funktion einsetzen muss. Um im Startpunkt die n-te Ableitung $y^{(n)}$ berechnen zu können, muss man demnach Werte für $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ vorgeben.

Beispiel senkrechter Wurf: Startzeit $x_0 = 0$, Starthöhe y_0 , Startgeschwindigkeit y'_0 .

Randwerte oder **Randbedingungen:** So nennt man zusätzliche Forderungen an die Lösungsfunktion im Zielpunkt, z.B. $y'(x = 1)$ soll Null sein, d.h., die Lösungskurve $y(x)$ dort waagrecht verlaufen.



Satz 1: Die allgemeine Lösung einer DGL n-ter Ordnung hat n Integrationskonstanten (freie Konstanten). Deren Werte ergeben sich für eine spezielle Lösung aus den Anfangswerten

Beispiel: Senkrechter Wurf Die DGL ist $m \ddot{y}(t) = -m \cdot g$

Trägheitskraft = Schwerkraft

Wir kürzen die Masse m heraus und erhalten die noch einfachere DGL $\ddot{y}(t) = -g$.

1. Integration $\int \ddot{y}(t) dt = \int -g dt \Rightarrow \dot{y}(t) = -gt + C_1$

2. Integration $\int \dot{y}(t) dt = \int (-gt + C_1) dt \Rightarrow y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2$

Die allgemeine Lösung ist $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2$

Wie hängen C_1 und C_2 mit den Startwerten zusammen? Wir geben folgende Startwerte vor:

Startzeit $t_0 = 0$, Starthöhe $y_0 = 5$ [m], Startgeschwindigkeit $\dot{y}_0 = 10$ [m/s].

Wir setzen die Startwerte $t_0 = 0$ und $y_0 = 5$ in die allgemeine Lösung ein:

$$5 = -\frac{g}{2} \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 5 \quad C_2 \text{ ist demnach die Starthöhe}$$

Wir setzen die Startwerte $t_0 = 0$ und $\dot{y}_0 = 10$ in die 1. Ableitung der allgemeinen Lösung ein:

$$10 = -g \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 10 \text{ ist Startgeschwindigkeit}$$

In diesem Sonderfall sind Startwerte und Integrationskonstanten sogar identisch. Das ist eher selten der Fall.

Satz 2: Die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL ist die Summe aus allgemeiner homogener Lösung und einer speziellen inhomogenen Lösung.

Satz 3: Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängige spezielle homogene Lösungen, dann ist die allgemeine homogene Lösung $y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$ mit beliebigen reellen oder komplexen Konstanten C_1, C_2 (bei einer DGL 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten als Beispiel)

Satz 4: Ist eine komplexe homogene Lösung einer DGL 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y_{hom} = y_1(x) + i \cdot y_2(x)$$

dann ist die allgemeine reelle homogene Lösung

$$y_{hom, reell} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Was heißt hier **linear unabhängig**? Zwei Funktionen heißen linear unabhängig, wenn für keine Konstante C gilt

$$y_1(x) = C \cdot y_2(x)$$

Z.B. sind die Funktionen $y_1 = 3 \sin(\omega t)$ und $y_2 = -\sin(\omega t)$ linear abhängig, da gilt

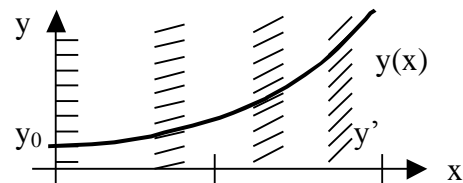
$$y_1 = -3 y_2$$

14.4 Das einfache Integral

Beispiel $y' = 2x$ oder $dy/dx = 2x$

oder $dy = 2x dx$

oder $\int dy = \int 2x dx \Rightarrow y = x^2 + C$



Zum Zeichnen denkt man sich die ganze x-y-Ebene mit kleinen Linien bedeckt, deren Anstieg jeweils dem Anstieg $y' = 2x$ entspricht. Dann startet man beim Anfangswert y_0 und folgt den kleinen Richtungslinien. Auf diese Weise entsteht die Lösungsparabel. Auch hier gilt

$$y_0 = C, \text{ was aus } y = x^2 + C \text{ für } x = 0 \text{ folgt}$$

14.5 Methode Trennung der Variablen

Diese Methode ist gut geeignet für DGL des Typs $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$ mit $g(y) \neq 0$.

Beispiel 1: $y'(x) = 1 \cdot y(x)$ mit $f(x) = 1$.

Diese DGL ist die Urform der Wachstums-DGL, denn die Änderung pro Zeiteinheit y' der Hefemenge ist (zumindest in der Wachstumsphase) proportional zur Menge y der vorhandenen Hefe.

$$(14.5.1) \quad \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx$$

oder integriert

$$\ln |y| = x + C$$

Da die Integrationskonstante frei wählbar ist, nehmen wir $\ln|C^*|$ statt C und erhalten nach dem Potenzieren der beiden Seiten von Gl. (14.5.1) die Wachstumskurve e^x .

$$|y| = e^{x + \ln|C^*|} \Rightarrow \pm y = e^{x + \ln|C^*|} \Rightarrow y = \pm C^* e^x$$

Da die Konstante $\pm C^*$ immer noch beliebig und frei wählbar ist, setzen wir sie gleich einer beliebigen Konstanten K und erhalten so die endgültige Form unserer Lösung

$$y(x) = K e^x$$

Beispiel 2: $x + y \cdot y' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y' = (-x) \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$

oder

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad y \, dy = -x \, dx \quad \Rightarrow \quad \int y \, dy = -\int x \, dx$$

oder

$$\frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y^2 + x^2 = 2C$$

Das ist die Kreisgleichung für einen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $r = \sqrt{2C}$. Diese abgefahrene Lösung traut man der simplen DGL oben überhaupt nicht zu.

Beispiel 3: $y' + f(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -f(x)y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -f(x) \, dx$

oder

$$\int \frac{1}{y} \, dy = -\int f(x) \, dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| + \ln|C^*| = -\int f(x) \, dx \quad \Rightarrow \quad y = C e^{-\int f(x) \, dx}$$

C^* bzw. C sind beliebige frei wählbare Integrationskonstanten, die erst bei einer speziellen Lösung wichtig werden.

Wir nehmen als konkrete DGL $x^2 y' + y = 0 \quad \rightarrow \quad y' + \frac{1}{x^2} y = 0$.

Das ist genau der Typ $y' + f(x)y = 0$ mit der Lösung $y = C e^{-\int f(x) \, dx}$

Wir müssen demnach nur $f(x) = 1/x^2$ integrieren und in die Lösungsformel einsetzen.

Es ist $\int \frac{1}{x^2} \, dx = \int (x^{-2}) \, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^2} \, dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right] \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x}$.

Eingesetzt in die Lösungsformel erhalten wir die Lösung $y = C e^{\frac{1}{x}}$

Um in einer konkreten Anwendung dieser DGL die Konstante C zu bestimmen, reicht es einen Startwert festzulegen, z.B. $y_1 = 5$ bei $x = 1$. (Startwerte für $x = 0$ verbieten sich hier). Eingesetzt in die Lösungsfunktion der DGL erhalten wir

$$5 = C e^1 \quad \rightarrow \quad C = 5 / e \quad \rightarrow \quad C = 1,8394$$

14.6 Methode separable DGL mit Trennung der Variablen

Gut geeignet für DGL des Typs $y' = f(a x + b y + c)$ (14.6.1)

Wir machen die Substitution $u = a x + b y + c$

Die Größe u hängt einmal direkt von x ab, aber da ja die Lösungsfunktion $y(x)$ auch von x abhängt, ist u ebenfalls eine Funktion von x , d.h., wir können $u(x)$ schreiben. Damit ist

$$u' = a + b y' \quad \text{mit} \quad y' = f(u) \quad \text{laut DGL oben.}$$

Man löst diese DGL $u' = a + b y'$ und setzt die Lösung in Gl. (14.6.1) ein.

Beispiel: $y' = 2 x - y$ d.h. $u = 2 x - y$ und $u' = 2 - y'$ oder $y' = 2 - u'$

Eingesetzt in $y' = 2 x - y$ gibt $2 - u' = 2 x - y$ oder $2 - u' = u$

$$\text{oder} \quad -u' = u - 2 \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u-2} = -dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{u-2} du = -\int dx$$

$$\text{oder} \quad \ln |u-2| = -x + \ln |C| \quad \rightarrow \quad \ln |u-2| - \ln |C| = -x$$

$$\text{oder} \quad \ln \left| \frac{u-2}{C} \right| = -x \quad \Rightarrow \quad \frac{u-2}{C} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad u = C e^{-x} + 2$$

Die Rücksubstitution in die Gleichung $u = 2 x - y$ liefert $2 x - y = C e^{-x} + 2$ oder die endgültige Lösung

$$y = 2 x - C e^{-x} - 2$$

Diese Lösung lässt sich aber auch recht gut mit dem e -Ansatz oder der Laplace-Transformation erhalten.

14.7 Integration einer DGL durch Substitution

Geeignet für den Typ $y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ Wir substituieren $u = \frac{y}{x}$

oder $y = x \cdot u \quad \rightarrow$ Produktregel $\rightarrow \quad y' = u + x u'$ mit $y = y(x)$ und $u = u(x)$

eingesetzt in die DGL gibt $f(u) = u + x u'$ oder $u' = \frac{f(u) - u}{x}$.

Jetzt löset man die Gleichung und macht dann eine Rücksubstitution.

Beispiel: $y'(x) = \frac{x+2y}{x} \Rightarrow y' = 1 + 2\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow y' = 1 + 2u$

Wegen $y' = u + x u' = 1 + 2u$ erhalten wir $x u' = 1 + u$
oder

$$x \frac{du}{dx} = 1 + u \Rightarrow \frac{du}{u+1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{u+1} du = \int \frac{1}{x} dx$$

oder

$$\ln |u+1| = \ln |x| + \ln |C| \rightarrow \ln |u+1| = \ln |C \cdot x|$$

oder

$$u + 1 = C \cdot x \rightarrow u = C \cdot x - 1.$$

Die Rücksubstitution gibt wegen $u = \frac{y}{x}$ und daraus $y = u \cdot x$ das Ergebnis

$$y(x) = (C \cdot x - 1) \cdot x = C x^2 - x$$

Wir machen die Probe : $y' = 2Cx - 1$ erhalten wir durch Differenzieren der Lösung.

Die Lösungsfunktion $y = C x^2 - x$ eingesetzt in die DGL $y' = 1 + 2y/x$ gibt:

$$y' = 1 + 2 \left(\frac{Cx^2 - x}{x} \right) = 1 + 2(Cx - 1) = 1 + 2Cx - 2 = 2Cx - 1,$$

d.h., wir erhalten denselben Ausdruck wie beim Differenzieren.

14.8 Methode Variation der Konstanten

Geeignet für die inhomogenen Typen $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

Die homogene Lösung, d.h. die Lösung der homogenen DGL $y' + f(x) \cdot y = 0$, war

$$y_{\text{hom}} = C e^{-\int f(x) dx}$$

Wir ersetzen aus didaktischen Gründen das C durch ein K (um im nachfolgenden Text Verwechslungen zu vermeiden.). Variation der Konstanten heißt, dass man Konstante K durch die Funktion K(x) ersetzt.

$$y(x) = K(x) e^{-\int f(x) dx} \tag{14.8.1}$$

Differenziert gibt das

$$y'(x) = K'(x) e^{-\int f(x) dx} - K(x) f(x) e^{-\int f(x) dx}.$$

Eingesetzt in die inhomogene DGL gibt das

$$K'(x) e^{-\int f(x) dx} - K(x) f(x) e^{-\int f(x) dx} + f(x) K(x) e^{-\int f(x) dx} = g(x)$$

Da sich die beiden mittleren Terme wegheben, bleibt eine deutlich kürzere Formel übrig:

$$K'(x)e^{-\int f(x) dx} = g(x) \quad \Rightarrow \quad K'(x) = g(x)e^{+\int f(x) dx}.$$

Integriert ergibt das

$$K(x) = \int \left(g(x) e^{\int f(x) dx} \right) dx + C.$$

Eingesetzt in Gl. (14.8.1) gibt das

$$y(x) = \left(\int \left(g(x) e^{\int f(x) dx} \right) dx + C \right) \cdot e^{-\int f(x) dx}.$$

Beispiel für diesen Typ einer inhomogenen DGL ist $y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$

Integral $f(x)$ ist $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

Die Lösung ist dann $y(x) = \left(\int \cos(x) e^{\ln|x|} dx + C \right) e^{-\ln|x|}$

oder

$$y(x) = \left(\int (\cos(x) \cdot x) dx + C \right) \cdot \frac{1}{x}$$

Das Integral $\cos(x) \cdot x$ lösen wir mit der Methode „partielle Integration“ aus Mathe 1. Diese Methode ist die Umkehrung der Produktregel des Differenzierens (Erinnerung!!):

$$\int u' v = uv - \int uv'$$

$$\cos \cdot x = \sin \cdot x - \int \sin$$

Die endgültige Lösung ist demnach

$$y(x) = \left(\sin(x) \cdot x + \cos(x) + C \right) \cdot \frac{1}{x}$$

Die Probe kann man auch hier durch das Differenzieren der Lösung bzw. durch das Einsetzen in die DGL und anschließenden Vergleich machen.

14.9 Lösung mit e-Ansatz von inhomogenen DGL mit konstanten Koeffizienten

1. Ordnung: $a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$

2. Ordnung: $a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$

Schrittfolge des Lösungsweges:

1. Homogene Lösung finden über die Wurzel(n) der charakteristischen Gleichung
2. Eine spezielle inhomogene Lösung finden unter Benutzung einer Tabelle und eines Koeffizientenvergleichs

3. Bestimmung der Konstanten durch Einsetzen der Startwerte in die allgemeine Lösung bzw. in deren Ableitung

Beispiel 1: $3 y'(x) + 2 y(x) = 4 \cos(x)$ mit Störfunktion $4 \cos(x)$

Wir suchen zuerst mittels e-Ansatz die Lösung der homogenen DGL $3 y'(x) + 2 y(x) = 0$.

Der e-Ansatz der homogenen Lösung lautet $y = C e^{rx}$ mit $y' = C r e^{rx}$

Eingesetzt in die homogene DGL erhalten wir $3 C r e^{rx} + 2 C e^{rx} = 0$.

Wir klammern $C e^{rx}$ aus und erhalten $C e^{rx} \cdot (3r + 2) = 0$ mit $C \neq 0$

Da e^{rx} nicht 0 werden kann, gilt $3r + 2 = 0$ (Char. Gl.) $\rightarrow r = -\frac{2}{3}$

Dieser Wert r heißt Wurzel der Charakteristischen Gleichung. Wir setzen ihn in den homogenen Lösungsansatz ein und erhalten

$$y_{\text{hom}}(x) = C e^{-(2/3)x}$$

Beim Suchen einer speziellen inhomogenen Lösung ist folgende Tabelle sehr hilfreich:

Tabelle spezieller inhomogener Lösungsansätze

Typ der Störfunktion		Spezieller inhomogener Lösungsansatz	
Konstante	k	Konstante	K
Potenz	$k x^n$	Polynom	$K_0 + K_1 x + \dots + K_n x^n$
Sinus	$k \sin(\omega x)$	Sinus und Kosinus	$K_1 \sin(\omega x) + K_2 \cos(\omega x)$
Kosinus	$k \cos(\omega x)$	Sinus und Kosinus	$K_1 \sin(\omega x) + K_2 \cos(\omega x)$
Exponentialfunktion	$k_1 e^{k_2 x}$	Exponentialfunktion	$K_1 e^{k_2 x}$

Die Konstanten k oder k_1 links können andere Werte haben, als die Konstanten K bzw. K_1 rechts, während k_2 und ω links und rechts gleich sind. Die Konstanten des Lösungsansatzes werden durch einen Koeffizientenvergleich bestimmt, indem man den speziellen Lösungsansatz in die inhomogene DGL einsetzt.

Zurück zu unserem Beispiel $3 y'(x) + 2 y(x) = 4 \cos(x)$. Die rechte Seite (Störfunktion) dieser DGL ist vom Typ „Kosinus“. Laut Tabelle haben wir den speziellen inhomogenen Lösungsansatz

$$y_{\text{inh spez}}(x) = K_1 \sin(\omega x) + K_2 \cos(\omega x).$$

Und differenziert

$$y'_{\text{inh spez}}(x) = K_1 \cos(\omega x) \cdot \omega - K_2 \sin(\omega x) \cdot \omega.$$

Der Lösungsansatz in die DGL eingesetzt liefert

$$3 K_1 \cos(x) \cdot 1 - 3 K_2 \sin(x) \cdot 1 + 2 K_1 \sin(x) + 2 K_2 \cos(x) = 4 \cos(x)$$

Da wir zwei Konstanten, K_1 und K_2 , zu bestimmen haben, benötigen wir auch zwei Gleichungen. Diese beiden Gleichungen liefert uns der **Koeffizientenvergleich**, indem wir

einmal die Kosinuse der linken Seite mit denen der rechten Seite vergleichen, und dann dasselbe mit den Sinussen links und rechts machen:

$$3 K_1 \cos(x) + 2 K_2 \cos(x) = 4 \cos(x) \quad \rightarrow \quad (3 K_1 + 2 K_2) \cos(x) = 4 \cdot \cos(x)$$

$$-3 K_2 \sin(x) + 2 K_1 \sin(x) = 0 \quad \rightarrow \quad (-3 K_2 + 2 K_1) \sin(x) = 0 \cdot \sin(x)$$

Da $\cos(x)$ bzw. $\sin(x)$ jeweils links und rechts in der Gleichung als Faktor auftritt, kürzen sich diese Funktionen heraus, und es bleibt ein einfaches Gleichungssystem mit 2 Unbekannten übrig:

$$\begin{aligned} 3 K_1 + 2 K_2 &= 4 \\ 2 K_1 - 3 K_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ein so kleines Gleichungssystem lösen wir am Besten, indem wir eine Gleichung in die andere einsetzen. Hier bietet es sich an, die zweite Gleichung in die erste einzusetzen:

$$2 K_1 - 3 K_2 = 0 \quad \rightarrow \quad 2 K_1 = 3 K_2 \quad \rightarrow \quad K_1 = \frac{3}{2} K_2$$

eingesetzt in die erste Gleichung gibt

$$3 \cdot \frac{3}{2} K_2 + 2 K_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 4,5 K_2 + 2,0 K_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 6,5 K_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 0,615$$

und mit $K_1 = \frac{3}{2} K_2$ für K_1 den Wert $K_1 = 1,5 \cdot 0,615 = 0,923$.

Die spezielle inhomogene Lösung lautet somit in ihrer vollständigen Form

$$y_{\text{inh spez}}(x) = 0,923 \sin(x) + 0,615 \cos(x).$$

Nach **Satz 2** ist dann die allgemeine inhomogene Lösung die Summe aus der allgemeinen homogenen Lösung und unserer speziellen inhomogenen Lösung, also:

$$y(x) = C e^{-(2/3)x} + 0,923 \sin(x) + 0,615 \cos(x).$$

Wollen wir eine Lösungskurve berechnen oder zeichnen, dann müssen wir einen Startwert vorgeben. Wir wählen als Startwert für $y(x)$ den Wert $y_0 = 1$ bei $x_0 = 0$. Wir setzen die beiden Werte in die allgemeine inhomogene Lösung ein:

$$1 = C e^{-(2/3) \cdot 0} + 0,923 \sin(0) + 0,615 \cos(0).$$

Wegen $e^0 = 1$ und $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$ erhalten wir

$$1 = C \cdot 1 + 0,923 \cdot 0 + 0,615 \cdot 1 \quad \rightarrow \quad 1 = C + 0,615$$

oder

$$C = 0,385$$

Die zeichenbare oder tabellierbare Anfangswertlösung zur allgemeinen inhomogenen Lösung lautet somit:

$$y(x) = 0,385 e^{-(2/3)x} + 0,923 \sin(x) + 0,615 \cos(x).$$

Betrachten wir die Lösungsformel, dann fällt folgendes auf: Die Lösung besteht aus zwei Teilen, die sich unterschiedlich verhalten:

1. Der Teil $0,385 e^{-(2/3)x}$ ist eine fallende e-Funktion, die schon für Werte um $x = 10$ sehr klein ist und rasch gegen Null geht. Dieser Anteil der Lösung, der aus der homogenen DGL hervorgeht, beschreibt das **Eigenverhalten** des durch die DGL beschriebenen physikalischen, biologischen oder technischen Systems, wenn es angestoßen wird (Startwert), aber weiter keine Störung erfolgt.
2. Der Teil $0,923 \sin(x) + 0,615 \cos(x)$ ist eine phasenverschobene und in der Amplitude veränderte Kopie der Störfunktion $4 \cos(x)$. Dieser inhomogene Teil der Lösung beschreibt die Lösung, die nach Beendigung des Einschwingvorgangs übrig bleibt, nämlich die **fortdauernde zwanghafte Bewegung** des Systems auf Grund der fortdauernden Störung.

Beispiel 2: Eine DGL zweiter Ordnung mit 2 reellen Wurzeln (nicht schwingendes System).

$$2 \ddot{x}(t) + 7 \dot{x}(t) + x(t) = 3t$$

Der e-Ansatz der homogenen Lösung ist

$$x(t) = C e^{rt}, \quad \dot{x}(t) = C r e^{rt}, \quad \ddot{x}(t) = C r^2 e^{rt}$$

Eingesetzt in die homogene Lösung $2 \ddot{x}(t) + 7 \dot{x}(t) + x(t) = 0$ und Faktor $C e^{rt}$ ausgeklammert, erhalten wir die charakteristische Gleichung dieser homogenen DGL:

$$2r^2 + 7r + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 + (7/2)r + (1/2) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 + pr + q = 0$$

Mit $p = (7/2)$ und $q = (1/2)$ liefert uns die p-q-Formel die beiden Wurzeln:

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{7}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}} = -1,75 \pm \sqrt{1,75^2 - 0,5} = -1,75 \pm 1,60$$

oder $r_1 = -0,15$ und $r_2 = -3,35$.

Damit lautet die allgemeine homogene Lösung $x_{\text{hom}}(t) = C_1 e^{-0,15t} + C_2 e^{-3,35t}$.

Laut Tabelle der speziellen inhomogenen Lösungsansätze ist der Typ unserer Störfunktion $3t$ ein Polynom und der spezielle inhomogene Lösungsansatz damit

$$x_{\text{spez, inhom}}(t) = K_0 + K_1 t \quad \text{mit den Ableitungen} \quad \dot{x}(t) = K_1 \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = 0$$

Eingesetzt in die DGL erhalten wir die Gleichung $2 \cdot 0 + 7 \cdot K_1 + K_0 + K_1 t = 3t$

Hier wird der Koeffizientenvergleich links und rechts für die Koeffizienten der t-Potenzen durchgeführt. Da es in diesem Beispiel nur zwei t-Potenzen gibt, nämlich $t^1 = t$ und $t^0 = 1$, erhalten wir die beiden einfachen Gleichungen für unsere unbekanntenen Konstanten K_0 und K_1 :

$$(7 K_1 + K_0) \cdot t^0 = 0 \cdot t^0 \quad \text{oder} \quad 7 K_1 + K_0 = 0$$

$$1 K_1 \cdot t^1 = 3 \cdot t^1 \quad \text{oder} \quad K_1 = 3$$

Die zweite Gleichung $K_1 = 3$ in die erste Gleichung $7 K_1 + K_0 = 0$ eingesetzt, liefert

$$K_0 = -7 \cdot 3 = -21 .$$

Die spezielle inhomogene Lösung ist damit $x_{\text{spez., inhom}}(t) = -21 + 3t$.

Nach **Satz 2** ist dann die allgemeine inhomogene Lösung die Summe aus der allgemeinen homogenen Lösung und unserer speziellen inhomogenen Lösung, also:

$$x(t) = C_1 e^{-0,15t} + C_2 e^{-3,35t} - 21 + 3t .$$

Wollen wir eine Lösungskurve berechnen oder zeichnen, dann müssen wir Startwerte vorgeben. Wir wählen als Startwert für $x(t_0=0)$ den Wert $x_0 = 5$ und die Startgeschwindigkeit $\dot{x}_0 = 0$. Wir setzen die beiden Werte t_0 und x_0 in die allgemeine inhomogene Lösung ein:

$$5 = C_1 e^{-0,15 \cdot 0} + C_2 e^{-3,35 \cdot 0} - 21 + 3 \cdot 0$$

und wegen $e^0 = 1$

$$5 = C_1 + C_2 - 21$$

oder

$$C_1 + C_2 = 26$$

Damit haben wir aber erst eine Gleichung für die beiden Unbekannten C_1 und C_2 . Deshalb setzen wir die Startgeschwindigkeit $\dot{x}_0 = 0$ und $t_0=0$ in die 1. Ableitung der allgemeinen inhomogenen Lösung ein:

$$\dot{x}(t) = -0,15 C_1 e^{-0,15t} - 3,35 C_2 e^{-3,35t} + 3 ,$$

und erhalten wieder wegen $e^0 = 1$

$$10 = -0,15 C_1 - 3,35 C_2 + 3 \quad \text{oder} \quad -0,15 C_1 - 3,35 C_2 = 7 .$$

Damit haben wir wieder ein kleines Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 &= 26 \\ -0,15 \cdot C_1 - 3,35 \cdot C_2 &= 7 . \end{aligned}$$

Wir stellen Gleichung 1 um und erhalten $C_1 = 26 - C_2$. Das in die 2. Gl. Eingesetzt gibt

$$-0,15 \cdot (26 - C_2) - 3,35 \cdot C_2 = 7 \quad \rightarrow \quad -3,9 + 0,15 C_2 - 3,35 C_2 = 7$$

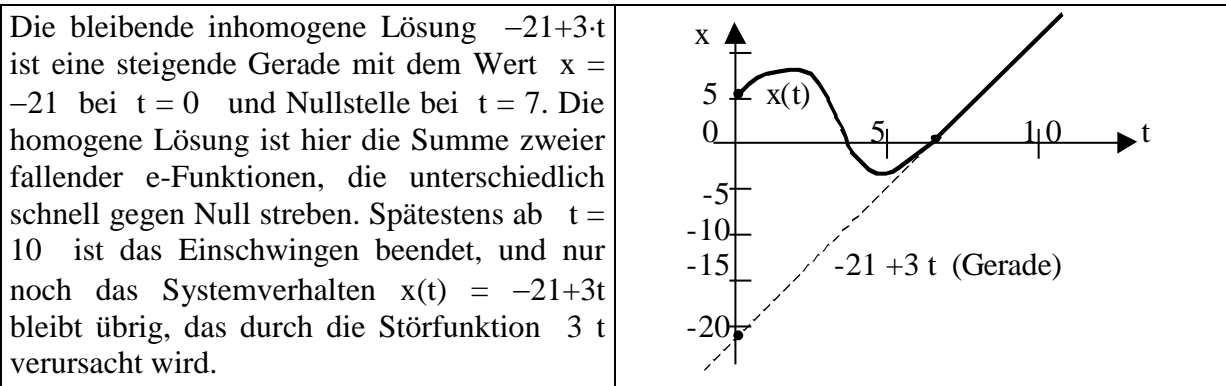
oder

$$-3,2 C_2 = 10,9 \quad \rightarrow \quad C_2 = -3,406$$

und mit $C_1 = 26 - C_2 \quad \rightarrow \quad C_1 = 29,406$

Die zeichenbare oder tabellierbare spezielle Lösung zur allgemeinen inhomogenen Lösung lautet somit:

$$x(t) = 29,406 e^{-0,15t} - 3,406 e^{-3,35t} - 21 + 3t.$$



Beispiel 3: Eine DGL zweiter Ordnung mit reeller Doppelnullstelle (nicht schwingendes System).

$$z''(x) + 2z'(x) + z(x) = 5e^{0,2x}$$

Charakteristische Gleichung ist

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1} = -1$$

mit der Doppelwurzel bei $r = -1$.

Satz 5: *Hat die charakteristische Gleichung der homogenen Lösung Mehrfachwurzeln, dann gewinnt man weitere linear unabhängige Lösungsansätze durch Multiplikation des einfachen e-Ansatzes mit den Potenzen der unabhängigen Variablen bis zur (n-1)-ten Potenz, wenn n die Vielfachheit der Wurzel ist.*

Bei einer DGL 2. Ordnung benötigen wir einen Ansatz mit 2 linear unabhängigen e-Termen. Diese sind nach Satz 5 dann $C_1 e^{-1 \cdot x}$ und $C_2 \cdot x \cdot e^{-1 \cdot x}$ und die allgemeine homogene Lösung damit

$$z_{\text{hom}}(x) = C_1 e^{-1 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-1 \cdot x}.$$

Laut Tabelle der speziellen inhomogenen Lösungsansätze ist die Störfunktion vom Typ "Exponentialfunktion" $k_1 e^{k_2 x}$ mit dem Lösungsansatz $K_1 e^{k_2 x}$. Die Konstante $k_2=0,2$ übernehmen wir direkt aus der Störfunktion, während wir den Wert der Konstanten K_1 noch durch den Koeffizientenvergleich bestimmen müssen.

$$z_{\text{spez., inh}}(x) = K_1 e^{0,2x} \quad \text{mit} \quad z'(x) = 0,2 K_1 e^{0,2x} \quad \text{und} \quad z''(x) = (0,2)^2 K_1 e^{0,2x}.$$

Den Ansatz und seine Ableitungen setzen wir in die inhomogene DGL

$$z''(x) + 2z'(x) + z(x) = 5e^{0,2x} \quad \text{ein und erhalten}$$

$$0,04 K_1 e^{0,2x} + 0,4 K_1 e^{0,2x} + K_1 e^{0,2x} = 5 e^{0,2x} \quad \rightarrow \quad (0,04+0,4+1) K_1 = 5$$

oder

$$K_1 = 5 / 1,44 = 3,472 .$$

Damit ist die allgemeine Lösung $z(x) = C_1 e^{-1 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-1 \cdot x} + 3,472 e^{0,2x}$.

Eine zeichenbare oder tabellierbare Lösung benötigt bei einer DGL 2. Ordnung zwei Startwerte. Wir nehmen bei $x_0=0$ Starthöhe $z_0=5$ und Startgeschwindigkeit $z'_0=-8$.

Setzen wir $x_0=0$ und $z_0=5$ in die allgemeine inhomogene Lösung ein, erhalten wir wegen $e^0=1$

$$5 = C_1 + C_2 \cdot 0 + 3,472 \quad \rightarrow \quad C_1 = 5 - 3,472 = 1,528$$

Setzen wir $x_0=0$ und $z'_0=-8$ in die 1. Ableitung der allgemeinen inhomogenen Lösung, $z'(x) = -1 \cdot C_1 e^{-1 \cdot x} + C_2 \cdot (e^{-1 \cdot x} - x \cdot e^{-1 \cdot x}) + 0,2 \cdot 3,472 e^{0,2x}$ ein, erhalten wir

$$-8 = -C_1 + C_2 + 0,6944$$

und mit $C_1 = 1,528$

$$C_2 = C_1 - 8 - 0,6944 = -7,166 .$$

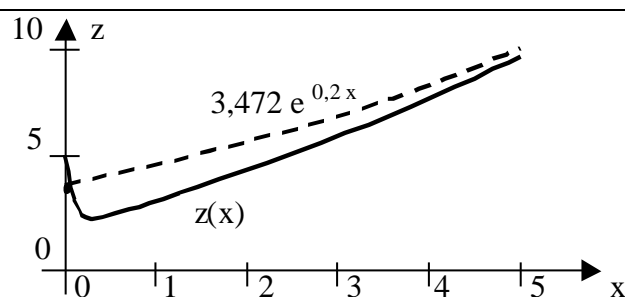
Damit lautet die zeichenbare oder tabellierbare inhomogene Lösung für unsere Startwerte

$$z(x) = 1,528 e^{-1 \cdot x} - 7,166 \cdot x \cdot e^{-1 \cdot x} + 3,472 e^{0,2x} .$$

Wir machen uns eine kleine Wertetabelle zum Zeichnen:

x	$1,528 e^{-x}$	$-7,166 \cdot x \cdot e^{-x}$	$3,427 e^{0,2x}$	z(x)
0	1,528	0	3,427	5,000
1	0,562	-2,636	4,241	2,167
2	0,206	-1,939	5,179	3,446
3	0,076	-1,070	6,326	5,332
5	0,010	-0,241	9,437	9,206

Die bleibende inhomogene Lösung $3,472 e^{0,2x}$ ist eine steigende e-Kurve mit dem Wert $z = 3,472$ bei $x = 0$. Die homogene Lösung ist auch hier die Summe zweier fallender e-Funktionen, die unterschiedlich schnell gegen Null gehen. Für $x > 10$ ist das Einschwingen beendet. Das Systemverhalten $3,427 \cdot e^{0,2x}$ bleibt übrig, das durch die Störfunktion $5 \cdot e^{0,2x}$ verursacht wird.



Beispiel 4: DGL zweiter Ordnung mit einem konjugiert-komplexen Nullstellenpaar (schwingendes Verhalten)

$$\ddot{x}(t) + 3 \dot{x}(t) + 5 x(t) = 4 \sin(2t) \quad \text{mit der Störfunktion } 4 \sin(2t)$$

Die charakteristische Gleichung $r^2 + 3r + 5 = 0$ führt auf das konjugiert-komplexe Nullstellenpaar

$$r_{1,2} = -1,5 \pm \sqrt{(-1,5)^2 - 5} = -1,5 \pm 1,658 i$$

Der e-Ansatz $x(t) = C e^{rt}$ führt auf eine erste Form der homogenen Lösung

$$x_{\text{hom}}(t) = C_1 e^{(-1,5 + 1,658 i)t} + C_2 e^{(-1,5 - 1,658 i)t}.$$

Wegen $e^{(-1,5 + 1,658 i)t} = e^{-1,5 t} \cdot e^{+1,658 i t}$ bzw. $e^{(-1,5 - 1,658 i)t} = e^{-1,5 t} \cdot e^{-1,658 i t}$

können wir den Dämpfungsterm $e^{-1,5 t}$ ausklammern. Außerdem gelten nach Euler die beiden Formeln $e^{\alpha i} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ und $e^{-\alpha i} = \cos \alpha - i \sin \alpha$. Damit kommen wir zu einer weiteren, aber noch nicht endgültigen Form der homogenen Lösung.

$$x_{\text{hom}}(t) = e^{-1,5 t} (C_1 (\cos (1,658 t) + i \sin (1,658 t) + C_2 (\cos (1,658 t) - i \sin (1,658 t)))$$

Wir fassen die Kosinus- und die Sinusterme zusammen:

$$x_{\text{hom}}(t) = e^{-1,5 t} ((C_1 + C_2) \cos (1,658 t) + (C_1 - C_2) i \sin (1,658 t))$$

Da die Klammern $(C_1 + C_2)$ und $(C_1 - C_2)$ beliebige Konstanten enthalten, können wir sie auch in A und B umbenennen. Eine weitere Vereinfachung offeriert uns der **Satz 4**, der sagt, dass wir für eine reelle Lösung einfach das „i“ weglassen dürfen. Damit erhalten wir die für uns endgültige Form der allgemeinen homogenen Lösung

$$x_{\text{hom}}(t) = e^{-1,5 t} (A \cos (1,658 t) + B \sin (1,658 t)) .$$

Die vielen Umformungen nach der Berechnung der Nullstellen bis zur endgültigen homogenen Lösung lässt man später einfach weg.

Eine spezielle inhomogene Lösung finden wir mit der Tabelle der speziellen inhomogenen Lösungsansätze. Die Störfunktion ist vom Typ „Sinus“. Der zugehörige Ansatz ist

$$x_{\text{spez, inh}}(t) = K_1 \sin (\omega x) + K_2 \cos (\omega x)$$

mit den Ableitungen

$$\dot{x}_{\text{spez, inh}}(t) = K_1 \cos (\omega x) \omega - K_2 \sin (\omega x) \omega$$

und

$$\ddot{x}_{\text{spez, inh}}(t) = -K_1 \sin (\omega x) \omega^2 - K_2 \cos (\omega x) \omega^2$$

Um die Konstanten K_1 und K_2 zu bestimmen, setzen wir $x_{\text{spez, inh}}(t)$ und seine Ableitungen in die inhomogene DGL $\ddot{x}(t) + 3 \dot{x}(t) + 5 x(t) = 4 \sin (2 t)$ ein.

Für ω übernehmen wir den Wert $\omega = 2$ aus der Störfunktion.

$$-K_1 \sin (2 t) \cdot 2^2 - K_2 \cos (2 t) \cdot 2^2 +$$

$$3 (K_1 \cos (2 t) \cdot 2 - K_2 \sin (2 t) \cdot 2) +$$

$$5 (K_1 \sin (2 t) + K_2 \cos (2 t)) = 4 \sin (2 t)$$

Sortiert nach Sinus- und Kosinustermen erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin (2 t) \cdot (- 4 K_1 - 6 K_2 + 5 K_1) + \\ \cos (2 t) \cdot (- 4 K_2 + 6 K_1 + 5 K_2) = 4 \sin (2 t) . \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich lautet demnach

$$1 \cdot K_1 - 6 \cdot K_2 = 4 \quad (\text{Koeffizienten des Sinus})$$

$$6 \cdot K_1 + 1 \cdot K_2 = 0 \quad (\text{Koeffizienten des Kosinus})$$

Aus Gleichung 2 folgt $K_2 = - 6 \cdot K_1$. Das in die 1. Gleichung eingesetzt, liefert

$$1 \cdot K_1 - 6 (- 6 \cdot K_1) = 4 \quad \rightarrow \quad 37 K_1 = 4 \quad \rightarrow \quad K_1 = 0,108 ,$$

und aus der $K_2 = - 6 \cdot K_1$ folgt dann $\rightarrow K_2 = - 0,648$.

Damit lautet die allgemeine inhomogene Lösung dieser DGL

$$\begin{aligned} x (t) = e^{-1,5 t} (A \cos (1,658 t) + B \sin (1,658 t)) + \\ 0,108 \sin (2 t) - 0,648 \cos (2 t) . \end{aligned}$$

Die Eigenfrequenz des Oszillators ist $\omega_0 = 1,658$, die Frequenz der Störfunktion und damit der aufgezwungenen Schwingung ist $\omega_s = 2,0$. Die Eigenschwingung klingt mit der Dämpfung $e^{-1,5 t}$ ab. Was bleibt, ist eine erzwungene gleichförmige Schwingung der Frequenz $\omega_s = 2,0$. Diese Schwingung ist jedoch gegenüber der Störfunktion $4 \sin (2 t)$ phasenverschoben, was man am Kosinusanteil erkennt, und die Amplitude ist nicht 4, sondern $\sqrt{(0,108)^2 + (-0,648)^2} = 0,657$.

Geben wir Startwerte vor, dann sind damit auch die bisher noch frei verfügbaren Konstanten A und B festgelegt. Wir geben die Startzeit $t_0 = 0$, die Startauslenkung $x_0 = 1$ und die Startgeschwindigkeit $\dot{x}_0 = - 1$ vor. Zuerst setzen wir $t_0 = 0$ und $x_0 = 1$ in die allgemeine inhomogene Lösung ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 1 = e^0 (A \cos (0) + B \sin (0)) + \\ 0,108 \sin (0) - 0,648 \cos (0) . \end{aligned}$$

Wegen $e^0 = 1$, $\cos (0) = 1$ und $\sin (0) = 0$ erhalten wir die einfache Gleichung

$$1 = A - 0,648 \quad \rightarrow \quad A = 1,648 .$$

Jetzt setzen wir $t_0 = 0$ und $\dot{x}_0 = - 1$ in die erste Ableitung der allgemeinen inhomogenen Lösung ein. Diese lautet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -1,5 e^{-1,5 t} (A \cos (1,658 t) + B \sin (1,658 t)) + \\ & e^{-1,5 t} (-A \sin (1,658 t) \cdot 1,658 + B \cos (1,658 t) \cdot 1,658) + \\ & 0,108 \cos (2 t) \cdot 2 + 0,648 \sin (2 t) \cdot 2 . \end{aligned}$$

Wegen $e^0 = 1$, $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$ erhalten wir

$$-1 = -1,5 A + 1,658 B + 0,216$$

und mit $A = 1,648$ vom ersten Einsetzen oben $1,658 B = -1 + 1,5 \cdot 1,648 - 0,216$ oder

$$B = 0,757 .$$

Damit lautet die inhomogene Startwertelösung

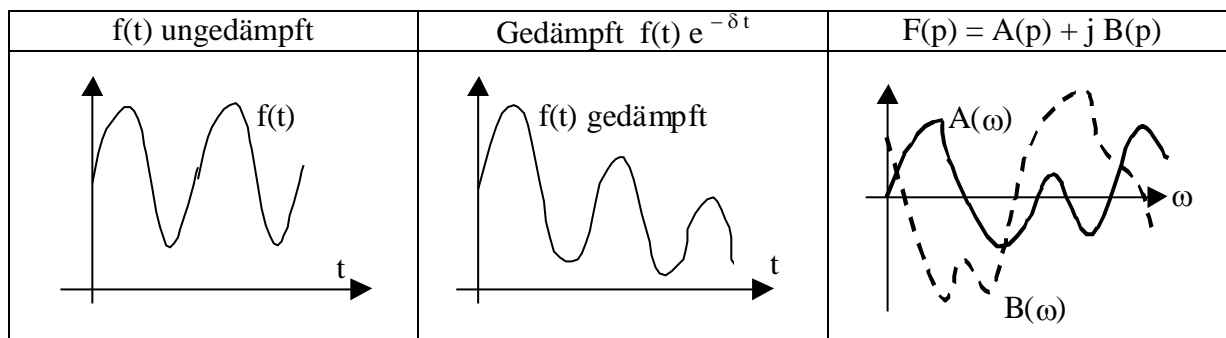
$$\begin{aligned} x(t) = & e^{-1,5 t} (1,648 \cos (1,658 t) + 0,757 \sin (1,658 t)) + \\ & 0,108 \sin (2 t) - 0,648 \cos (2 t) . \end{aligned}$$

14.10 Laplace - Transformation

Pierre-Simon Marquis de Laplace, 1789-1827, französischer Astronom und Mathematiker, erklärte die Bahn des Erdmondes und der Planeten und ihre gegenseitigen Störungen. Er gilt als Entwickler des wichtigen mathematischen Hilfsmittels der Laplace-Transformation. Diese ist aus der Physik, Elektronik und Regelungstechnik nicht wegzudenken.

- Viele Probleme, z.B. die Stabilität einer Regelung, werden mit der Laplace-Transformation sichtbar gemacht und / oder verbessert.
- Bei der Lösung von DGL mit der Laplace-Transformation müssen nur **linksseitige Anfangswerte** berücksichtigt werden. Das ist hilfreich bei **sogenannten sprungfähigen Systemen**.

Die Laplace-Transformierte $F(p)$ einer Zeitfunktion $f(t)$ ist das kontinuierliche Frequenzspektrum der gedämpften Zeitfunktion für alle möglichen Dämpfungen δ . Laplace hatte erkannt, dass man besonders für periodische Funktionen, wie Sinus oder Kosinus, kein kontinuierliches Frequenzspektrum berechnen kann, da dieses von der oberen Integrationsgrenze abhängen würde. Das Integral über den Sinus z.B. ist der Kosinus, und der wechselt ständig immer zwischen -1 und $+1$, und es wäre totaler Unsinn, ihm einen Wert zuzuschreiben. Das sieht jedoch anders aus mit einer exponentiellen Dämpfung der Funktion. Die Amplituden des Sinus werden immer kleiner, leisten immer weniger Beitrag zum Integral, und plötzlich lässt sich ein Wert bestimmen. Das hat Laplace vor 200 Jahren erkannt und darauf seine Theorie aufgebaut.



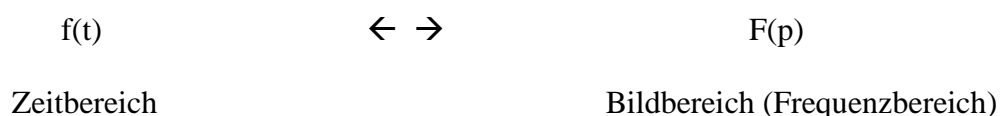
In der komplexen Größe p steckt als Realteil die Dämpfung δ und als Imaginärteil die Kreisfrequenz ω , d.h.

$$p = \delta + j \omega \quad (\text{Elektrotechniker sagen } j \text{ statt } i)$$

Erinnerung! Nach Euler ist $e^{\delta + j\omega} = e^{\delta} \cdot e^{j\omega} = e^{\delta} \cdot (\cos(\omega) + j \sin(\omega))$

Die Kurven $A(\omega)$ und $B(\omega)$ als Bestandteil der Laplacetransformierten $F(p)$ für eine bestimmte Dämpfung δ sind also nichts weiter als das Kosinus- bzw. das Sinusspektrum, das in der gedämpften Kurve $f(t) e^{-\delta t}$ steckt.

Die Laplace-Transformation ist eine Integralformel. Man kann vom Zeitbereich in den Bildbereich transformieren, was auch dem Laien bei einigen Funktionen gelingt, man kann aber auch zurücktransformieren, was geschulten Funktionentheoretikern vorbehalten ist.



Die Laplace-Transformation vom Zeitbereich in den Bildbereich erfolgt mit der Formel

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Die Laplacetransformierten $F(p)$ zu vielen Zeitfunktionen $f(t)$ stehen in sogenannten Korrespondenztafeln, z.B. bei Makarov. So ist z.B. die Laplacetransformierte $F(p)$ der Rampenfunktion

$$f(t) = t \quad \rightarrow \quad F(p) = 1 / p^2 .$$

14.10.1 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Linearität $a f_1(t) + b f_2(t) \quad \leftarrow \rightarrow \quad a F_1(p) + b F_2(p)$

Differenziation $\dot{f}(t) \quad \leftarrow \rightarrow \quad p F(p) - f(-0)$

$\ddot{f}(t) \quad \leftarrow \rightarrow \quad p^2 F(p) - p f(-0) - p \dot{f}(-0)$

$f(-0)$ und $\dot{f}(-0)$ sind *linksseitige Anfangswerte* (wichtig bei Sprungfunktionen)

Integration	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	\leftrightarrow	$\frac{1}{p} F(p)$
Zeitliche Verschiebung	$f(t - t_0)$	\leftrightarrow	$F(p) e^{-p t_0}$
Endwertsatz	$f(t \rightarrow \infty)$	\leftrightarrow	$\lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$
Anfangswertsatz	$f(+0)$	\leftrightarrow	$\lim_{p \rightarrow \infty} p F(p)$
Faltung	$\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$	\leftrightarrow	$F_1(p) F_2(p)$

Die Faltung ist ein wichtiges Integral für die Berechnung der Systemantwort auf eine beliebige Störung $f_2(t)$.

Korrespondenztabelle $f(t) \leftrightarrow F(p)$

Zeitbereich $f(t)$	Bildbereich $F(p)$
Einheitsimpuls $\delta(t)$	1
Einheitssprung $1(t)$	$1/p$
Rampe t	$1/p^2$
Potenz t^n	$n! / (p^{n+1})$
Entladekurve e^{-at}	$1 / (p+a)$
Aufladekurve $1 - e^{-at}$	$a / (p(p+a))$
$t \cdot$ Entladekurve $t e^{-at}$	$1 / (p+a)^2$
Sinus $(1/a) \cdot \sin(at)$	$1 / (p^2 + a^2)$
Kosinus $\cos(at)$	$p / (p^2 + a^2)$
Sinus hyperbolicus $(1/a) \cdot \sinh(at)$	$1 / (p^2 - a^2)$
Kosinus hyperbolicus $\cosh(at)$	$p / (p^2 - a^2)$

(Manche Mathematiker verwenden statt des Buchstabens p das s . Die Bedeutung ist dieselbe. Es gibt natürlich weit umfangreichere Korrespondenztafeln.)

14.10.2 Partialbruchzerlegung

Das Lösen einer DGL mit der Laplace-Transformation erfolgt in den drei Schritten:

1. Transformation der DGL und der Störfunktion in den Bildbereich mittels Korrespondenztafel
2. Auflösung der im Schritt 1 entstandenen algebraischen Gleichung nach x
3. Rücktransformation der Gleichung für x in den Zeitbereich wieder mittels der Korrespondenztafel

Die Hintransformation in den Bildbereich und das Auflösen nach x sind nicht sehr schwer. Man muss dazu weder differenzieren noch integrieren können. Aber die Rücktransformation erfordert einiges Geschick, vor allem die Zerlegung komplizierter Brüche in eine Summe kleinerer Brüche, die man dann in der Korrespondenztabelle wiederfindet. Dazu dient die Partialbruchzerlegung.

Der Bruch $\frac{h(p)}{g(p)}$ soll in eine Summe einfacher Brüche zerlegt werden, z.B. um die Rücktransformation mit der Korrespondenztabelle zu ermöglichen. Als Beispiel nehmen wir den Bruch

$$\frac{K}{p(1+T_1 p)} \quad \text{mit den beiden Konstanten } K \text{ und } T_1 .$$

Schritt 1: Bestimme alle einfachen bzw. mehrfachen reellen Nullstellen bzw. konjugiert-komplexe Nullstellenpaare des Nenners. Dazu formen wir um:

$$\frac{K}{p(1+T_1 p)} \Rightarrow \frac{K/T_1}{p(1/T_1 + p)}$$

Jetzt erkennen wir die 2 Nullstellen des Nenners zu $p_1 = 0$ und $p_2 = -1/T_1$.

Schritt 2: Der Ansatz für einen Bruch für eine einfache reelle Nullstelle p_k ist $\frac{const}{p - p_k}$, also bei zwei einfachen reellen Nullstellen

$$\frac{K/T_1}{p(1/T_1 + p)} = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2} = \frac{A}{p - 0} + \frac{B}{p - (-1/T_1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1/T_1 + p}$$

Schritt 3: Wir multiplizieren beide Brüche, den ganz linken und den ganz rechten aus obiger Gleichsetzungskette, mit dem linken Nenner. Dadurch verschwinden sowohl ganz links als auch ganz rechts die Nenner und wir erhalten links und rechts jeweils ein Polynom in p .

$$\frac{K/T_1}{p(1/T_1 + p)} \cdot p(1/T_1 + p) = \frac{A}{p} \cdot p(1/T_1 + p) + \frac{B}{1/T_1 + p} \cdot p(1/T_1 + p)$$

oder

$$K/T_1 = A \cdot (1/T_1 + p) + B \cdot p \Rightarrow \frac{K}{T_1} = \frac{A}{T_1} + p \cdot (A + B)$$

Durch einen Koeffizientenvergleich der p -Koeffizienten auf der linken Seite und auf der rechten Seite lassen sich die Konstanten bestimmen. Wir finden:

$$\text{Für Potenz } p^0: \quad K/T_1 = A/T_1 \quad \text{und damit} \quad A = K$$

$$\text{Für Potenz } p^1: \quad 0 = (A + B) \quad \text{und damit} \quad B = -A = -K$$

Unsere kleine Partialbruchzerlegung lautet damit

$$\frac{K}{p(1+T_1 p)} = \frac{K}{p} - \frac{K}{1/T_1 + p}$$

Bei r-fachen reellen Nullstellen p_r müssen auch r Partialbrüche entstehen. Der Ansatz ist

$$\frac{A}{(p-p_r)} + \frac{B}{(p-p_r)^2} + \dots + \frac{Z}{(p-p_r)^r}$$

Bei einem konjugiert-komplexen Nullstellenpaar (p_o, p_o^*) ist der Ansatz für den Partialbruch

$$\frac{A p + B}{(p-p_o)(p-p_o^*)}$$

Ist $p_o, p_o^* = -\alpha \pm j\beta$, dann vereinfacht sich der Nenner des Ansatzes zu

$$\frac{A p + B}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$$

Ein konjugiert-komplexes Nullstellenpaar sollte man nicht auseinander reißen, d.h., man sollte nicht versuchen, zwei Partialbrüche daraus zu machen. Zumeist findet man in der Korrespondenztabelle immer ein $F(p)$, das genau auf ein konjugiert-komplexes Nullstellenpaar zugeschnitten ist, und das man dann relativ einfach rücktransformieren kann.

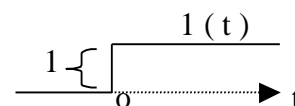
14.10.3 Beispiel Auflade- bzw. Aufheizkurve

Auflade- bzw. Aufheizkurven finden ebenso wie die Entlade- bzw. Abkühlkurven oftmalige Anwendung in der Elektronik, Elektrotechnik, Regelungstechnik. Die DGL ist

$$T_1 \dot{x}(t) + x(t) = K \cdot y(t)$$

Dabei ist T_1 die Zeitkonstante, t die Zeit, $x(t)$ die gesuchte Antwortkurve, K die Verstärkung bzw. Proportionalitätsfaktor und $y(t)$ die Störfunktion, die das Aufladen oder das Aufheizen bewirkt. Ein technisches Beispiel ist ein Rührkessel, bei dem die Heizung $y(t)$ eingeschaltet wird, worauf die Temperatur $x(t)$ zu steigen beginnt.

Die zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltete Heizung eines Rührkessels wird durch die Sprungfunktion $1(t)$ modelliert. Starttemperatur des Rührkessels sei X_o zum Zeitpunkt $t = 0$. (Sprungfunktion siehe Bild rechts)



Die Laplace-Transformation der DGL finden wir mit der Korrespondenztabelle im Abschnitt 14.10. Die Laplace-Transformierte zu $x(t)$ ist einfach $x(p)$, die multiplikativen Konstanten T_1 und K werden einfach übernommen, und die Sprungfunktion $1(t)$ wird zu $1/p$.

$$T_1 (p x(p) - X_o) + x(p) = K \cdot (1/p)$$

oder

$$x(p) \cdot (1 + T_1 p) = K/p + T_1 \cdot X_o$$

oder

$$x(p) = \frac{K}{p(1+T_1 p)} + \frac{X_0 T_1}{(1+T_1 p)}$$

Term der inhomogenen Lösung
Enthält die Störfunktion und die
Systemkonstante T_1

Term der homogenen
Lösung. Enthält den An-
fangswert und Systemkon-
stante T_1

Zur Rücktransformation finden wir im Bildbereich der Korrespondenztabelle die Funktion $F(p) = a / (p(p+a))$. Ihr entspricht im Zeitbereich die Aufladekurve $f(t) = 1 - e^{-at}$. Schauen wir uns oben den Term der inhomogenen Lösung an, dann bringt eine Erweiterung von Zähler und Nenner mit $(1/T_1)$ diesen Term in die gewünschte Form. Wir müssen nur noch $a = (1/T_1)$ setzen:

$$\frac{K}{p(1+T_1 p)} \cdot \frac{1/T_1}{1/T_1} = \frac{K \cdot (1/T_1)}{p((1/T_1)+p)} \quad \text{und mit } a = (1/T_1): \quad K \cdot \frac{a}{p(p+a)}$$

Der Term rücktransformiert führt demnach auf die Zeitfunktion

$$K(1 - e^{-at}) = K(1 - e^{-t/T_1})$$

Jetzt wenden wir uns der Rücktransformation des Terms der inhomogenen Lösung zu. In der Korrespondenztabelle korrespondiert die Entladekurve $f(t) = e^{-at}$ aus dem Zeitbereich mit der Bildfunktion $F(p) = 1 / (p+a)$. Wieder erweitern wir den Bruch mit $a = (1/T_1)$ und erhalten den neuen Bruch im Bildbereich

$$X_0 \cdot \frac{1}{((1/T_1)+p)} = X_0 \cdot \frac{1}{(p+a)} \quad \text{mit der Zeitfunktion} \quad X_0 e^{-at} = X_0 e^{-t/T_1}$$

Die Lösung setzt sich demnach aus zwei e-Funktionen zusammen und lautet

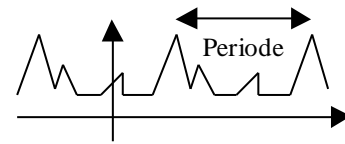
$$x(t) = K(1 - e^{-t/T_1}) + X_0 e^{-t/T_1}$$

15. Fourierreihen, Fourieranalyse

Jean-Baptiste-Joseph Baron de Fourier, ein französischer Mathematiker und Physiker (1768-1830) entwickelte die Theorie der Fourierreihen. Jede periodische Funktion lässt sich durch eine Fourierreihe darstellen. Das Wichtige ist jedoch, dass den einzelnen **Harmonischen** in vielen Anwendungen eine echte physikalische Bedeutung zukommt. Beispiele sind:

1. Die Gezeiten hängen von Sonne, Mond und eventuellen Eigenschwingungen der Wassermassen ab. Schon vor Einführung der Computer gab es analoge Gezeitenrechenmaschinen, die die durchschnittliche Tide im Sinne einer Fourierreihe berechnen konnten.
2. Schwingquarze werden als Frequenzstabilisatoren in elektronischen Schaltungen verwendet. Ihre Grundschwingung wäre für die moderne Taktrate im GHz-Bereich viel zu langsam. So regt man den Quarz in einer Oberschwingung an, d.h., er schwingt mit einem Vielfachen seiner Grundschwingung.

Eine Fourierreihe ist die Darstellung einer beliebigen periodischen Funktion, z.B. wie die auf der Graphik rechts, durch eine Reihe von Sinus- und/oder Kosinus-terminen. Jede Periode wiederholt sich unverändert.



Es gibt zwei Formen der Fourierreihe. Die eine Form benutzt nur den Sinus oder nur den Kosinus, dafür aber als Zusatzinformation zu jeder Harmonischen k eine eigene Phasenverschiebung ϕ_k . Die zweite Form trennt von vornherein in Kosinus- und Sinusanteil jeder Harmonischen k . Beide Formen sind gleichwertig und können ineinander umgerechnet werden (Mathe 1).

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx + \phi_k) \quad \text{als Form mit Sinus und Phase}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad \text{als Form mit Sinus und Kosinus}$$

Ist die Funktion $f(x)$ über eine Periode, z.B. von $-\pi$ bis $+\pi$, formelmäßig bekannt, dann erhält man die **Koeffizienten** der Fourierreihe durch eine Fourieranalyse.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx \quad \text{Doppelter Mittelwert der Funktion}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

Der praktisch viel häufigere Fall ist, dass die Funktion $f(x)$ nur punktweise bekannt ist, d.h., als Folge von Messwerten im Computer. In diesem Falle werden aus den Integralen Summen, und Index k läuft nicht mehr bis Unendlich sondern (bei gerader Messwertanzahl) nur noch bis $n/2$, wenn n die Anzahl der Messwerte aus einer Periode ist.

$$a_0 = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_i \quad \text{Doppelter Mittelwert}$$

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_i \cos\left(k \left(i - \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \quad k = 1, 2, \dots, n/2$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f_i \sin\left(k \left(i - \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \quad k = 1, 2, \dots, (n/2)-1$$

Beachten Sie, dass von den b-Koeffizienten zwei weniger berechnet werden. Insgesamt werden jedoch aus n Messwerten n Koeffizienten berechnet, d.h., es gibt keine Redundanz. Will man aus der Reihe die Funktion $f(x)$ wiederherstellen, dann gilt die Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{(n/2)-1} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] + \frac{a_{n/2}}{2} \cos\left(\frac{n}{2}x\right)$$

Die schnelle Fourieranalyse (FFT = Fast Fourier Transformation) nutzt aus, dass bei $n=2^P$, z.B. $n = 1024$, immer wieder dieselben Sinus- und Kosinuswerte auftreten. Durch systematische Teilsummenbildung spart man viele der aufwendigen Berechnungen von Sinus- oder Kosinuswerten. Die FFT wird in Computertomographen, in der Festigkeitslehre und in der Bildverarbeitung sehr viel genutzt.

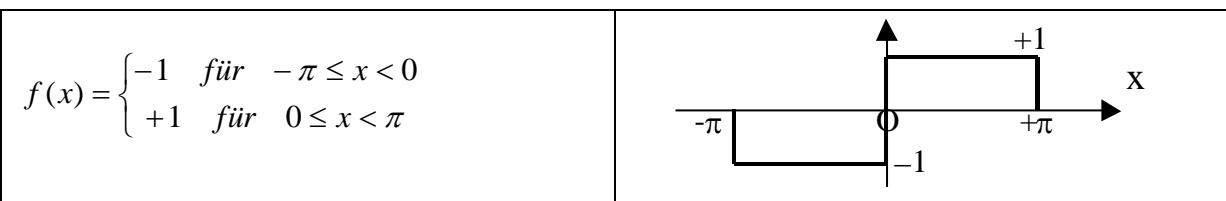
Nicht ganz so schnell, dafür aber bei beliebiger Messwertzahl n einsetzbar, ist eine Fourieranalyse, bei der jeweils ein Sinus-Kosinus-Paar mit Hilfe der Additionstheoreme aus dem vorangehenden Paar berechnet wird. Statt der zeitaufwendigen Sinus- und Kosinusfunktionen sind für beide Werte insgesamt nur 4 Multiplikationen und zwei Additionen auszuführen.

Der a_1 - und der b_1 -Koeffizient liefern die Amplitude A_1 der Grundschwingung:

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} .$$

Die weiteren Koeffizientenpaare liefern entsprechend die Amplituden der Oberschwingungen, d.h. der Schwingungen mit der doppelten, der dreifachen, 4-fachen, ..., k -fachen Frequenz.

15.1 Beispiel Rechteckschwingung



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = 0 \quad \text{ohne Rechnung ersichtlich (Mittel ist 0)}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -1 \cdot \cos(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} 1 \cdot \cos(kx) dx$$

oder

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{-\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} \right\} = 0$$

Alle a -Koeffizienten sind Null. Einmal rein formal, da das Integral $\sin(k\pi)$ für ganzzahlige k immer Null ist, aber auch sachlich, denn die abgebildete Rechteckschwingung ist eine ungerade Funktion, während die Kosinusterme nur gerade Anteile einer Funktion wiedergeben können. Der Grund: der Kosinus ist selbst eine gerade Funktion.

Die b -Koeffizienten sind die Sinusanteile der Funktion. Das Integral des Sinus ist $-\cos$.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{-\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} \right\}$$

Wir setzen die Grenzen ein. Wegen $\cos(x) = \cos(-x)$ und $\cos(0) = 1$ erhalten wir

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{k} - \frac{\cos(+k\pi)}{k} - \frac{\cos(+k\pi)}{k} + \frac{1}{k} \right\}$$

oder

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{k} - \frac{2 \cos(k\pi)}{k} \right) = \frac{2}{\pi k} (1 - \cos(k\pi)).$$

Die ersten drei b-Koeffizienten sind damit

$$\text{Für } k=1 \quad b_1 = \frac{2}{\pi} (1 - \cos(\pi)) = \frac{2}{\pi} (1 - (-1)) = \frac{4}{\pi}$$

$$\text{Für } k=2 \quad b_2 = \frac{2}{2\pi} (1 - \cos(2\pi)) = \frac{2}{2\pi} (1 - 1) = 0$$

$$\text{Für } k=3 \quad b_3 = \frac{2}{3\pi} (1 - \cos(3\pi)) = \frac{2}{3\pi} (1 - (-1)) = \frac{4}{3\pi}$$

Allgemein ist $b_k = 0$ für alle geraden k , d.h. für $k = 2, 4, 6, \dots$

$$b_k = \frac{4}{k\pi} \text{ für alle ungeraden } k, \text{ d.h. } k = 1, 3, 5, \dots$$

15.2 Perioden ungleich 2π

Ist die Periode nicht 2π , sondern allgemein $2L$, dann gilt für die Reihenentwicklung von $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right],$$

und für die Berechnung der Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

Bei den Summenformeln für diskrete Messwerte statt einer geschlossenen Funktion ändert sich nichts, denn dort tritt die Periode nicht explizit auf, sondern nur indirekt als Messwertzahl n pro Periode.

15.3 Bestimmungstücke von Wellen

Zeitliche Wellenbewegung: Beschreibt die Auslenkung y einer Welle über der Zeit, d.h. die Wellenbewegung an einem festen Messort.

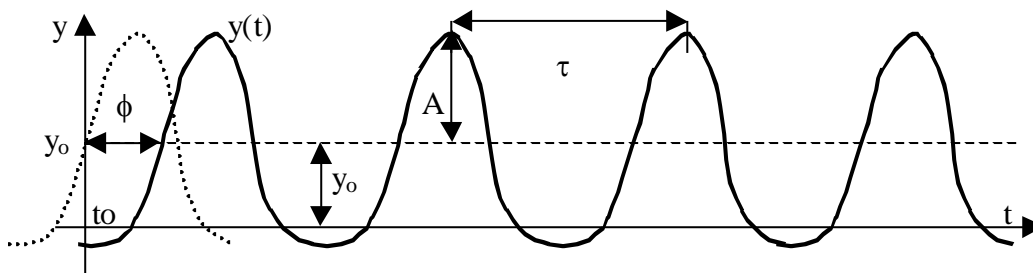
$$y(t) = y_0 + A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{hat 4 Parameter}$$

y_0 ist die mittlere Höhe der Wellenbewegung (Mitte zwischen oben und unten)

A ist die Amplitude, d.h. der maximale Ausschlag nach oben oder unten von der mittleren Höhe aus gemessen.

ω ist die Kreisfrequenz mit $\omega = 2\pi f$ und $f = 1/\tau$
 f = Frequenz, d.h. Schwingungen pro Zeiteinheit, z.B. pro Sekunde
 τ = Periodendauer, z.B. in Sekunden

ϕ ist die Phase, d.h. die Phasenverschiebung der Welle gegenüber einer reinen Sinuswelle gleicher Kreisfrequenz, die zum Zeitpunkt $t = t_0$ startet.



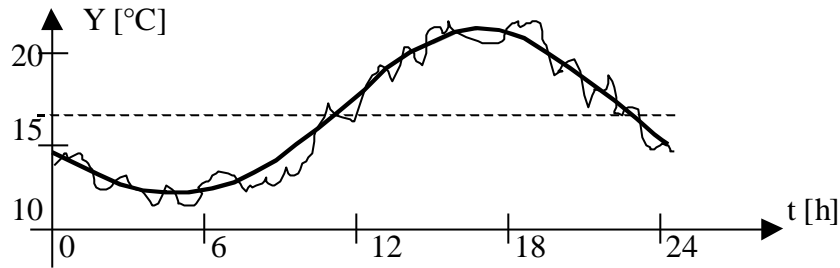
Die Abbildung zeigt eine phasenverschobene Sinuswelle mit der mittleren Höhe y_0 . Die zugehörige reine Sinuswelle ist gestrichelt. Die Periodendauer τ erfasst eine vollständige Welle.

15.4 Beispiel Tagestemperaturgang

Die Funktion $y(t) = y_0 + A \sin(\omega t + \phi)$ soll an einen gemittelten Temperaturverlauf eines Tages angepasst (gefitet) werden. Dazu zur Erinnerung einige Zahlen:

Ein Tag hat 24 Stunden. Diese 24 h entsprechen einer Periode von 2π . Die Winkleinheit ist Radiant oder [Rad]. Dann ist unsere Kreisfrequenz bei einer vollen Schwingung pro Tag

$$\omega = \frac{2\pi}{24} \left[\frac{\text{Rad}}{\text{h}} \right] \quad \text{Kreisfrequenz.}$$



Die Abbildung zeigt den gemessenen Durchschnittsverlauf mit seinen statistischen Schwankungen. Die Modellkurve, unser phasenverschobener Sinus, ist fett gezeichnet. Um z.B. mit Excel eine Kurvenanpassung durchführen zu können, müssen die Messdaten als Wertespalte vorliegen (Zielgröße). Excel kann nicht direkt die Amplitude A und Phase ϕ fitten, da ϕ kein linearer Parameter ist. Wir benötigen eine Aufspaltung des phasenverschobenen Sinus in eine Kosinus- und eine Sinuswelle (Mathe 1). Das statistische Regressionsmodell für die Kurvenanpassung ist mit dieser Aufspaltung

$$y(t) = y_0 + A \sin(\omega t + \phi) = y_0 + A \sin(\phi) \cos(\omega t) + A \cos(\phi) \sin(\omega t)$$

Konstante $A \sin(\phi)$ nennen wir in der Regression b_1 , $A \cos(\phi)$ nennen wir b_2 , und y_0 nennen wir b_0 . Die Umrechnung folgt aus den Additionstheoremen des Sinus und Kosinus (Mathe 1). Wir müssen demnach in Excel zwei weitere Spalten berechnen gemäß unserem Regressionsmodell, nämlich eine Spalte mit Kosinus- und eine Spalte mit Sinuswerten.

$$y(t) = b_0 + b_1 \cos\left(\frac{2\pi}{24} t\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{24} t\right) \quad (15.4.1)$$

Nach einer Regressionsanalyse habe uns Excel folgende Werte für die Koeffizienten abgeliefert:

$$b_0 = 16,12 \quad b_1 = -2,427 \quad b_2 = -3,313$$

Durch den Vergleich des Regressionsmodells mit Gl. (15.4.1) finden wir:

$$y_0 = b_0 = 16,12 \text{ [}^\circ\text{C]} \text{ mittlere Tagestemperatur}$$

$$b_1 = A \sin(\phi), \quad b_2 = A \cos(\phi) \quad \rightarrow \quad \sin(\phi) = b_1/A, \quad \cos(\phi) = b_2/A,$$

Damit können wir den Phasenwinkel ϕ^* berechnen (* Wenn Nenner negativ, dann π addieren)

$$\phi^* = \arctan\left(\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}\right) = \arctan\left(\frac{b_1/A}{b_2/A}\right) = \arctan\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \arctan\left(\frac{-2,427}{-3,313}\right) = 0,63$$

Da der Nenner hier negativ ist ($-3,313$), müssen wir zum Winkel ϕ^* noch π addieren.

$$\phi = \phi^* + \pi = 3,771 \text{ [Rad]}.$$

Es ist üblich, Phasenwinkel immer im Intervall $[-\pi, +\pi]$ anzugeben. Liegt der Winkel außerhalb, addiert oder subtrahiert man solange 2π , bis die Phase im Intervall liegt. Hier subtrahieren wir 2π und erhalten

Phasenwinkel $\phi = -2,51$ [Rad].

Die Amplitude A ergibt sich jetzt, da wir den Phasenwinkel ϕ haben, wegen $b_1 = A \sin(\phi)$ zu

$$A = \frac{b_1}{\sin(\phi)} = \frac{-2,427}{-0,592} = 4,1 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

Man könnte natürlich auch A mit $b_2 = A \cos(\phi)$ berechnen, oder wegen $\sin^2 + \cos^2 = 1$ auch mit der Formel

$$A = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{(-2,427)^2 + (-3,313)^2} = 4,1 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

Wir rechnen den Phasenwinkel $\phi = -2,51$ [Rad] in Stunden um, damit wir wissen, wann unser hypothetischer Temperaturverlauf die Mittelwertlinie von unten schneidet.

$$\phi [h] = \frac{\phi [\text{Rad}]}{2\pi [\text{Rad}]} \cdot 24 [h] = \frac{-2,51}{2\pi} \cdot 24 = -9,58 [h]$$

Der aufsteigende y_0 -Durchgang erfolgt bei unserer Sinuswelle 9,58 Stunden **nach** Periodenbeginn (Mitternacht), d.h., etwa um **9 Uhr 35 Minuten** wird das Tagesmittel erreicht. Erinnern wir uns daran, dass eine negative Phase die Kurve auf der Horizontalen nach rechts verschiebt.

Minimum:	9 Uhr 35	- 6 Stunden	=	3 Uhr 35
Maximum:	9 Uhr 35	+ 6 Stunden	=	15 Uhr 35.

15.5 Feststehende räumliche Wellen

Waschbretter, Wellblech oder Sanddünen sind Beispiele für feststehende räumliche Wellen. Die Gleichung für die Auslenkung y in Abhängigkeit vom Ort x ist

$$y(x) = y_0 + A \sin(\omega x + \phi) .$$

- x = Entfernung vom Koordinatenursprung z.B. in [m]
- y_0 = Mittlere Höhe, d.h. Mitte zwischen Wellenberg und Wellental z.B. in [m]
- A = Amplitude, d.h. maximaler Ausschlag von der Mittellinie ab gerechnet z.B. in [m]
- ω = Kreisfrequenz mit $\omega = 2\pi k$, z.B. [Rad / m], d.h. Winkel/Meter.
- ϕ = Phasenwinkel, d.h. Verschiebung dieser Welle gegenüber einer reinen Sinuswelle, Angabe in [Rad]

Aus der Kreisfrequenz ω lassen sich die Wellenzahl k und die Wellenlänge λ ableiten bzw. umgekehrt.

$$\omega = 2\pi k \text{ [Rad / m]} \quad \rightarrow \quad k = \omega / 2\pi \text{ [1/m]} \quad \text{Wellenzahl pro Meter}$$

$$\lambda = 1 / k = 2\pi / \omega \text{ [m]} \quad \text{Wellenlänge, z.B. von Wellenberg zu Wellenberg}$$

Beispiel Qualitätssicherung bei der Produktion von Wellblech

Wellblech muss hoch genug gewellt sein, damit die nötige Biegesteifigkeit erreicht wird. Die ist z.B. notwendig, wenn das Wellblech als Garagendach eine vorgegebene Schneelast aushalten soll. Die einzuhaltende Bedingung ist $2A > \lambda$ bzw. $A > \lambda / 2$ d.h., die Amplitude muss mindestens die halbe Wellenlänge betragen.

Eine Sonde an der Biegemaschine nimmt die Messwerte x und $y(x)$ auf, d.h. die durchgelaufene Millimeterzahl an Wellblech und die zugehörige momentane Blechhöhe. Ein Computer berechnet nach dem in Kapitel 15.4 eingeführten Regressionsmodell

$$y(x) = b_0 + b_1 \cos(\omega x) + b_2 \sin(\omega x)$$

die Koeffizienten b_0, b_1, b_2 und die Kreisfrequenz ω . Da ω kein linearer Parameter ist, genügt hier kein einfaches Regressionsprogramm, sondern man muss einen **Solver** bemühen. Excel bietet ihn an, aber man muss ihn extra laden und sich in seine Handhabung einarbeiten. Konstante $A \sin(\phi)$ nennen wir in der Regression b_1 , $A \cos(\phi)$ nennen wir b_2 , und y_0 nennen wir b_0 .

Wir nehmen an, der Solver habe folgende Werte berechnet:

$$b_0 = 32,4 \quad b_1 = 13,15 \quad b_2 = 28,62 \quad \omega = 0,114$$

Wir bestimmen daraus y_0, A, λ, ϕ .

$$y_0 = b_0 = 32,4 \text{ [mm]} \quad \text{mittlere Höhe}$$

$$A = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{(13,15)^2 + (28,62)^2} = 31,50 \text{ [mm]} \quad \text{Amplitude}$$

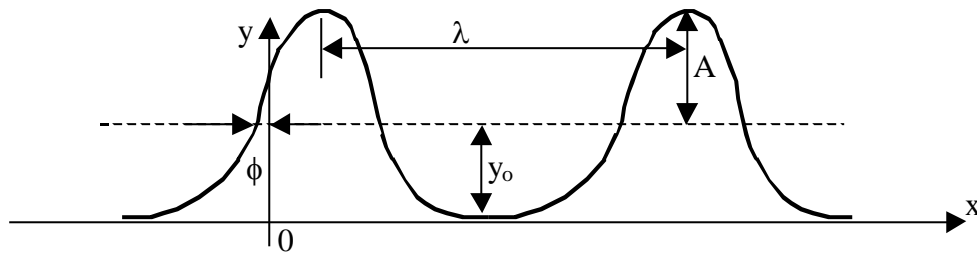
$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0,114} = 55,12 \text{ [mm]} \quad \text{Wellenlänge}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \arctan\left(\frac{13,15}{28,62}\right) = 0,431 \text{ [Rad]} \quad \text{Phasenwinkel}$$

Bei einem positiven Phasenwinkel ist die Welle gegenüber der reinen Sinuswelle etwas nach links verschoben. Wir wollen diese Verschiebung in Millimeter umrechnen. Dazu benutzen wir die Tatsache, dass ein Vollwinkel von 2π einer Wellenlänge λ entspricht.

$$\phi \text{ [mm]} = \frac{\phi \text{ [Rad]}}{2\pi \text{ [Rad]}} \cdot \lambda \text{ [mm]} = \frac{0,431}{2\pi} \cdot 55,12 = 3,8 \text{ [mm]}$$

Die Blechwelle hat demnach in dieser Momentaufnahme der Produktion ihren y_0 -Durchgang 3,8 [mm] **links** vom Messnullpunkt $x_0 = 0$.



15.6 Im Raum fortschreitende Wellen

Beispiele sind Druckwellen in der Luft oder im Wasser, Konzentrationswellen, Oberflächenwellen. Betrachtet man nur die Zeit t und eine Richtung x der Wellenausbreitung, dann hängt die momentane Auslenkung y vom Ort und der Zeit ab.

$$y(x, t) = y_0 + A \sin\left(\omega t + \phi - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (15.6.1)$$

- x = Entfernung vom Koordinatenursprung z.B. in [m]
- y_0 = Mittlere Höhe, d.h. Mitte zwischen Wellenberg und Wellental z.B. in [m]
- A = Amplitude, d.h. maximaler Ausschlag von der Mittellinie ab gerechnet z.B. in [m]
- ω = Kreisfrequenz mit $\omega = 2\pi f$, z.B. [Rad /s], d.h., Winkel pro Sekunde.
- ϕ = Phasenwinkel, d.h. Verschiebung dieser Welle gegenüber einer reinen Sinuswelle, Angabe in [Rad]
- λ = Wellenlänge, z.B. von Wellenberg zu Wellenberg, Angabe z.B. in [m]

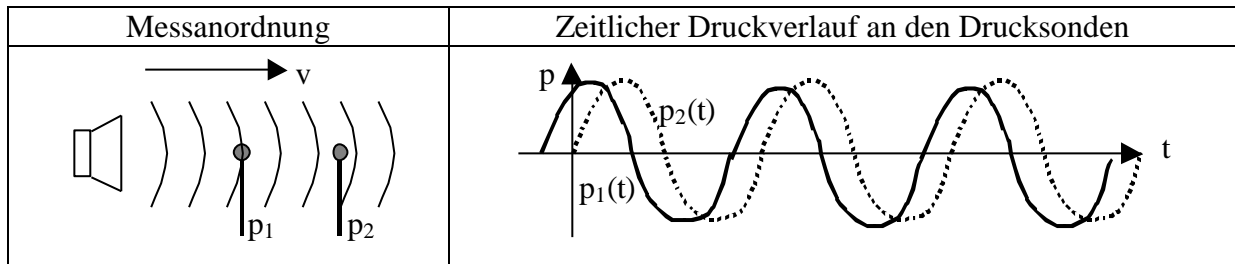
Setzt man $x = x_0$, d.h. auf einen konstanten Wert, dann erhält man die zeitlichen Schwankungen am Ort $x = x_0$ mit der zusätzlichen Phasenverschiebung bzw. Zeitdifferenz

$$-\frac{2\pi}{\lambda} x_0 \text{ [Rad]} \Leftrightarrow -\frac{x_0}{v} \text{ [s]} \quad \text{wobei } v \text{ [m/s] die Wellengeschwindigkeit ist.}$$

Setzt man $t = t_0$ auf einen konstanten Wert, dann erhält man das Momentanbild einer Welle, d.h. die örtlichen Schwankungen zur Zeit t_0 . Das negative Vorzeichen vor $-\frac{2\pi}{\lambda} x$ in Gl. (15.6.1) kennzeichnet eine Wellenausbreitung in positive x -Richtung.

Beispiel: Kontinuierliche Schallgeschwindigkeitsmessung mit 2 Drucksonden

Zwei Differenzdrucksonden p_1 und p_2 sind im Abstand $\Delta x = 7,5$ [cm] montiert. Ein Schallgeber (Lautsprecher) erzeugt Schallwellen der Frequenz $f = 500$ [Hz], d.h. die Kreisfrequenz ist $\omega = 2\pi f = 3141,6$ [Rad / s].



Ein Rechner registriert jeweils 20 ms lang die Messwerte der beiden Sonden und führt dann mit den beiden Messwertreihen p_1 und p_2 mittels eines **Solverprogramms** (z.B. aus Excel) Kurvenanpassungen durch. Die Ergebnisse seien:

$$p_1(t) = 0,0041 + 29,46 \sin(\omega t + 0,1304)$$

$$p_2(t) = -0,0008 + 29,47 \sin(\omega t - 0,5792)$$

Die Phasendifferenz ist $\Delta\phi = 0,1304 - (-0,5792) = 0,7096$ [Rad].

Vollwinkel 2π entspricht einer Welle bzw. $\Delta t = 1/500$ [s]. Also entspricht unser Phasenwinkel $\Delta\phi$ der kleinen Zeitverschiebung zwischen den beiden Wellenankünften,

$$dt = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \cdot \Delta t = \frac{0,7096}{2\pi} \cdot \frac{1}{500} = 0,0002259 \text{ [s]}.$$

Mit dem Abstand $\Delta x = 7,5$ [cm] der beiden Messsonden können wir die Schallgeschwindigkeit berechnen:

$$v = \frac{\Delta x}{dt} = \frac{0,075}{0,0002259} = 332 \left[\frac{m}{s} \right] \quad \text{Wellengeschwindigkeit.}$$

15.7 Wellendifferenzialgleichung

Die Wellendifferenzialgleichung ist eine partielle Differenzialgleichung, denn sie muss die zeitliche und die örtliche Ableitung einer Größe f , z.B. der Auslenkung einer gespannten Saite, miteinander verknüpfen (v ist die Wellengeschwindigkeit)	Die gespannte Saite ist ein einfaches Modell, aus dem sich die Wellendifferenzialgleichung mit einigem Geschick ableiten lässt. In vielen Physikbüchern ist sie abgehandelt. F_0 ist die Kraft (Saitenspannung), dS ein Saitenelement, d.h. ein differenziell kleines Stück Saite.
$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}$	

Jede beliebige Funktion $f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = u(\mathbf{v} \mathbf{t} \pm \mathbf{x})$ kommt als Lösung in Frage, wenn sie die Randbedingungen und Anfangswertbedingungen erfüllt. Lösungen können auch alle Kombinationen sein, wie

$$f(x, t) = u(vt + x) \quad \text{linksläufige Welle}$$

$$f(x, t) = w_1(vt \pm x) \pm w_2(vt \pm x) \pm \dots \quad \text{Wellensalat}$$

- v = Wellengeschwindigkeit [m/s] (Phasengeschwindigkeit)
 f = Frequenz der Welle in [1/s] am festen Ort x_0
 λ = Wellenlänge in [m] (z.B. von Maximum zu Maximum)
 τ = Periodendauer in [s] (Dauer einer Schwingung am festen Ort x_0)

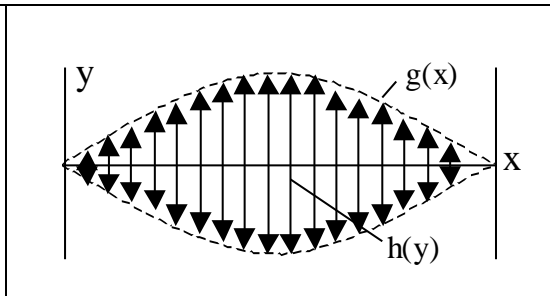
Folgende Formeln gelten:

$$v = \lambda / \tau \quad \tau = 1 / f \quad \omega = 2\pi f \quad f = \omega / 2\pi \quad f = 1 / \tau$$

$$v = \lambda f \quad \lambda = v / f \quad f = v / \lambda \quad \omega = (2\pi v) / \lambda$$

Stehende Wellen

Als stehende Wellen bezeichnet man Wellen, die feste Knotenpunkte haben, an denen sich das Medium nicht zu bewegen scheint. Dazwischen kann man sogenannte **Einhüllende** $g(x)$ um die Wellenbewegung $h(y)$ erkennen (siehe Graphik). Stehende Wellen sind eine Überlagerung aus hin- und rücklaufender Welle, die an den Enden reflektiert wird.



Der Produktansatz für $f(x, t)$ lautet $f(x, t) = g(x) \cdot h(t)$

Und damit werden die beiden partiellen Ableitungen zweiter Ordnung aus der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = g(x) \cdot \ddot{h}(t) \quad \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = g''(x) \cdot h(t)$$

Eingesetzt in die Wellengleichung erhalten wir

$$g(x) \ddot{h}(t) = v^2 g''(x) h(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v^2} \frac{\ddot{h}(t)}{h(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} \equiv k \quad (15.7.1)$$

Die Gleichsetzung mit einer Konstanten k folgt aus der Überlegung, dass die linke und die rechte Seite von Gl. (15.7.1) für jede $x - t$ -Kombination gelten muss, und das geht nur, wenn weder die linke Seite von der Zeit t noch die rechte Seite vom Ort x abhängt.

Aus der linken Seite von Gl. (15.7.1) folgt $\ddot{h}(t) = k v^2 h(t)$

oder die DGL $\ddot{h}(t) - k v^2 h(t) = 0$. (15.7.2)

Aus der rechten Seite folgt die DGL $g''(x) - k \cdot g(x) = 0$ (15.7.3)

Das sind zwei DGL mit konstanten Koeffizienten, die wir z.B. mit dem e-Ansatz lösen können. Die charakteristische Gleichung der DGL Gl. (15.7.2) lautet

$$r^2 - k v^2 = 0 \quad \text{mit den beiden Wurzeln} \quad r_{1,2} = \pm \sqrt{k v^2}$$

Da für Wellen nur komplexe Lösungen sinnvoll sind, denn nur diese führen auf den Sinus und den Kosinus, muss $k < 0$ sein mit Betrag K , d.h., $k = -K$. Mit diesem Trick, das Vorzeichen von seinem Betrag zu trennen, erhalten wir

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-K \cdot v^2} = \pm i \sqrt{K \cdot v^2} = \pm i \sqrt{K} \cdot v$$

und damit die Lösungsfunktion

$$h(t) = A \cdot \cos(\sqrt{K} \cdot v \cdot t) + B \cdot \sin(\sqrt{K} \cdot v \cdot t)$$

als reelle Lösung mit den Konstanten A und B , die sich aus eventuellen Anfangsbedingungen ergeben. Für $g(x)$ erhalten wir auf die gleiche Art die Lösung

$$g(x) = C \cdot \cos(\sqrt{K} \cdot x) + D \cdot \sin(\sqrt{K} \cdot x) \quad \text{mit den Konstanten } C \text{ und } D.$$

Bleiben wir beim Beispiel einer eingespannten Saite, dann gilt am linken Festpunkt

$$g(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C = 0 \quad (\text{Wegen } \cos(0) = 1, \sin(0) = 0).$$

Ist die Grundlinie der Saite L , dann gilt am rechten Festpunkt, d.h. am Ort $x = L$

$$g(L) = 0 \quad \rightarrow \quad \sin(\sqrt{K} \cdot L) = 0 \quad (\text{Da wegen } C = 0 \text{ das Kosinusglied fehlt})$$

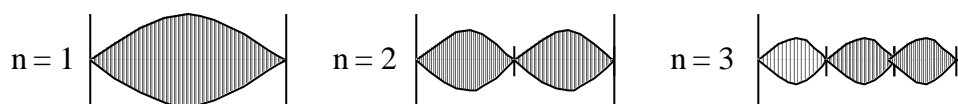
Das ist eine Bedingung für K und L , denn der Sinus wird nur Null bei den Argumenten $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$, d.h. es muss gelten $\sqrt{K} \cdot L = n \cdot \pi$, oder

$$K_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Eine Lösung $f_n(x, t) = h(t) \cdot g_n(x)$ lautet dann

$$f_n(x, t) = [A \cdot \cos(\sqrt{K_n} \cdot v \cdot t) + B \cdot \sin(\sqrt{K_n} \cdot v \cdot t)] \cdot D \cdot \sin(\sqrt{K_n} \cdot x).$$

Sie besteht aus dem zeitabhängigen Term, der das Auf und Ab der Saitenelemente am Ort x beschreibt, und aus der Einhüllenden, die die Amplituden, d.h. die Maximalausschläge, am Ort x vorgibt.



Bei der gespannten Saite hört man den Grundton bei $n = 1$. Den ersten Oberton ($n = 2$) hört man eine Oktave höher (doppelte Frequenz). Auch Summen dieser Lösungen sind zulässig.

Beispiel Schwingquarz

Schwingquarze werden in elektronischen Schaltungen als Frequenzstabilisatoren eingesetzt. Quarz reagiert auf elektrische Felder mit kleinen Längenänderungen (umgekehrter piezoelektrischer Effekt). Man bedampft die Ober- und Unterseite eines kleinen Quarzkristalls mit Metall, so dass ein Kondensator entsteht. Stimmen Quarzfrequenz und elektronische Schwingkreisfrequenz exakt überein, dann ist bei *Reihenresonanzschaltung* die Dämpfung minimal bzw. die Kondensatorwechselspannung maximal. Dieses Spannungssignal wird von der Elektronik benutzt, um die Frequenz des elektronischen Schwingkreises exakt auf den Quarz abzustimmen.

Der spezielle Quarz habe eine Schallgeschwindigkeit von 4863 [m/s] , sei $L = 2,3 \text{ [mm]}$ dick und werde in der 286. Oberschwingung ($n = 286$) angeregt. Welche Frequenz liegt an?

Bei $n = 1$, der Grundschiwingung, ist $L = \lambda / 2$.

Bei $n = 2$, der Oberschwingung 2, ist $L = \lambda$, d.h. $L = n \lambda / 2 = 2 \lambda / 2$.

Bei $n = 286$ $L = 286 \cdot \lambda / 2$ oder $\lambda = L / 143$.

Mit $f = v / \lambda$ können wir jetzt die Frequenz berechnen:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{4863 \cdot 143}{0,0023} \left[\frac{m}{s \cdot m} \right] = 3,0235 \cdot 10^8 \text{ [Hz]} \quad \text{oder} \quad \mathbf{302,35 \text{ MHz}}$$

16. Mathematik 2 Übungen

- Zerlegen Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ in eine symmetrische und eine antisymmetrische Matrix
- Drehe Vektor $P = (-2, 9, 3)$ um 27° um die y-Achse
- Lösen Sie nach Gaußelimination oder nach Gauß-Jordan das folgende lineare Gleichungssystem und machen Sie die Probe. Geben Sie alle Zwischenlösungen an.

$$\begin{aligned} 4,5 A - 3,0 B + 6,0 C &= 30,75 \\ -3,0 A + 6,0 B + 1,5 C &= -26,25 \\ 1,5 A + 4,5 B - 3,0 C &= -16,50 \end{aligned}$$

(Lösung: $A = 2,5$ $B = -3,5$ $C = 1,5$)

4. a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nach Sarrus

- b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem nach der Cramer'schen Regel über die Determinanten. Machen Sie die Probe.

$$\begin{aligned} 12,0 A + 2,0 B + 2,0 C &= 12,0 \\ 3,1 A + 4,0 B + 9,2 C &= 3,8 \\ 2,6 A + 1,8 B + 1,3 C &= -4,1 \end{aligned}$$

(Lösung: $\text{Det}A = -106,18$ $A = 1,64965$ $B = -6,6436$ $C = 2,7457$)

5. Berechnen Sie die inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ mit der Cramer'schen Regel.

Machen Sie die Probe $A^{-1} \cdot A = E$

6. a) Berechnen Sie die beiden Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,4 \\ -0,4 & 2,3 \end{pmatrix}$

- b) Berechnen Sie die unnormierten Eigenvektoren \vec{x}_1 , \vec{x}_2 mit $x_{11} = x_{12} = 1$

- c) Normieren Sie den ersten Eigenvektor auf Betrag 1 und nennen ihn \vec{x}_{1e}

Normieren Sie den zweiten auf Länge $1/2$ nach der Formel $\vec{x}_{2n} = \vec{x}_2 \cdot \left(\frac{1}{\|\vec{x}_2\|} \right)$

Zeichnen Sie die normierten Eigenvektoren im Koordinatenursprung

- d) Prüfen Sie über das Skalarprodukt $S = \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$ die Orthogonalität

7. a) Berechnen Sie zum Vektorfeld $\vec{A}(x, y) = \left(\frac{x^2}{\sqrt{y^2 + 1}}, \cos(x + y) \cdot x \cdot y \right)$

die Vektoren $\vec{A}(3, -2)$, $\vec{A}(2, 3)$, $\vec{A}(-1, 5)$

(Lösung $\vec{A}(3, -2) = (4,02, -3,24)$)

- b) Machen Sie eine Zeichnung der Vektoren mit Start an ihren Berechnungspunkten. Die x-Achse der Zeichnung geht von -2 bis $+8$, die y-Achse von -6 bis $+9$

8. Berechnen Sie die Polarkoordinaten r und ϕ zu den Berechnungspunkten der Aufgabe 7. Geben Sie die Winkel in Grad und Radiant an.

(Lösung $r_1 = 3,606$ $\phi_1 = -33,69^\circ$)

9. Berechnen Sie zum Punkt $P(x, y, z) = (27,3, -9,36, -3,84)$

- a) Kugelkoordinaten r, ϕ, θ (Lösung $r = 29,114$ $\phi = -18,92^\circ$ $\theta = -7,579^\circ$)

- b) Zylinderkoordinaten r, ϕ, z

10. a) Zeichnen Sie in Parameterdarstellung mit $y = 0, 0.5, 1.0$ als Parameter-

stufen die Funktion $z = (1 + y^2) e^{-0,8xy}$ im Intervall 0 bis 2. Machen Sie drei Funktionstabellen an den x-Stützstellen $x = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ für die 3 y-Stufen (Lösung: $z(0.5, 1.0) = 1,34$ $z(1.5, 1.0) = 0,60$)

- b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen z_x und z_y im Punkt $P = (0.4, 1.3)$ (Lösung: $z_x = -1,84$ $z_y = 1,15$)

11. Gegeben ist die Funktion $z(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)}$ Bestimmen Sie
 a) Machen Sie eine Skizze der Funktion für $y=0$ und $x \geq 0$
 b) Die Formeln der partiellen Ableitungen z_x und z_y
 c) Die Werte von z_x und z_y im Punkt $P(x,y) = (1.5, 0.8)$ und den Gradienten
 c) Den Einheitsvektor e_{ab} in Richtung des steilsten Abstiegs (entgegen Gradient)
 d) Welchen Winkel bildet e_{ab} mit der x-Achse in Grad und in Radiant?

(Lösungen: $z_x(P) = -0,3151$ $z_y(P) = -0,1681$ $|\nabla E| = 0,3571$ $28,079^\circ$)

12. Zur Kettenregel 1: Das Geländeprofil ist ein Kegel über der x-y-Ebene mit Mantelneigung $-2,6$. Die Kegelspitze liegt im Punkt $P(x,y,z) = (21, 4.8, 3.6)$.

- a) Entwickeln Sie die Formel $z(x, y)$ des Geländeprofiles
 b) Bahnkurve ist eine Gerade mit Winkel 30° zur x-Achse und Start im Punkt $P_0(x,y) = (0, 0)$. Machen Sie eine Geländeskizze mit Höhenlinien bei $z = 0, z = -5, z = -10, z = -15, z = -20$. Zeichnen Sie die Bahngerade ein.
 c) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Bahngeraden, d.h., die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ für eine Bahngeschwindigkeit $v = 0,75$.
 d) Berechnen Sie z im Bahnpunkt $t = 5$ und Anstieg dz/dt in diesem Punkt (Lösung $dz/dt = 1,825$)

13. Zur Kettenregel 2: Geländeprofil ist eine Parabolschüssel mit Tiefpunkt bei $(0, 0)$ und Höhe $z = 0,6 r^2$ (Zylinderkoordinaten). Die Bahn des Werkzeugs ist eine Sinuskurve $y = \sin(2x)$ (kartesische Koordinaten).

- a) Stellen die Formeln für $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ auf
 b) Berechnen Sie den Zahlenwert beider Richtungsanstiege für $x = 5$.

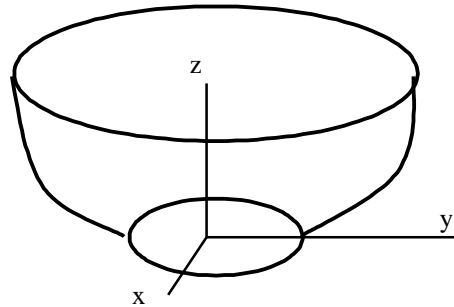
(Lösung $\frac{\partial z}{\partial x} = 6,0$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = -0,6528$)

14. Berechnen Sie das 3-fach-Integral mit $D_0 = 930$, $R = 0.75$, $k = 0.8$, $\alpha = 0.27$
 Schreiben Sie auch Zwischenschritte auf.

$$T = \int_{z=0,47}^{0,62} \int_{r=zR}^R \int_{\phi=0}^{\pi/2} D_0 z (1-r)^2 \sin(k\phi + \alpha) d\phi dr dz$$

(Lösung: $T = 5,5368$)

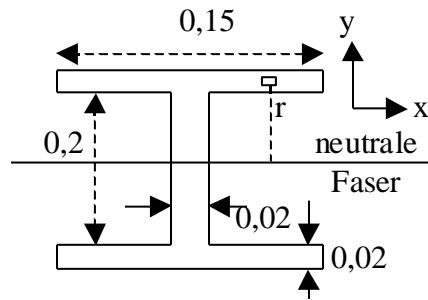
15. Berechne das Trägheitsmoment Θ des nebenstehenden Drehkörpers mit Dichte $\rho=7800 \text{ Kg/m}^3$, Höhe $h=1.5 \text{ m}$, unterem Radius $R_u=0.8 \text{ m}$ und einer Seitenwand-Begrenzungsformel $R(z)=R_u+z^{0.5}$.
- a) Geben Sie die allgemeine Integralformel für das Trägheitsmoment und Zylinderkoordinaten r, ϕ, z an
- b) Geben Sie das 3-fach-Integral mit den Grenzen für r, ϕ, z an.



c) Berechnen sie den Zahlenwert von Θ

Als Hilfe das Binom $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
 (Lösung: $\Theta = 148190 \text{ Kg m}^2$.)

16. Balkenbiegung: Gegeben ist das Profil eines Stahlträgers
- a) Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment $\Theta [\text{m}^4]$



(Lösung $Q = 0,0000728 [\text{m}^4]$)

- b) Der Balken habe ein mit $\varepsilon = 2 \cdot 10^{11} [\text{N/m}^2]$, eine Länge $L = 12 [\text{m}]$, und sei an beiden Enden aufgelegt. Berechnen Sie die Durchbiegung z bei einer mittig aufgehängten Last von $2000 [\text{Kg}]$.
 (Lösung: $z = - 4,26 \text{ cm}$)
- c) Machen Sie eine Skizze mit Last und Lagerkräften. Was bewirkt das Eigengewicht des Stahlträgers?

17. Numerische Lösung eines gekoppelten Systems von DGL nach Euler (Raketenstart). Die Rakete entwickelt 80 Sekunden lang eine konstante Schubkraft von $F = 1,7 \text{ Mo g}$. Die Startmasse ist $M_0 = 2.000.000 [\text{Kg}]$. Das Endgewicht ist $0,15 \text{ Mo}$, d.h. 85% der Startmasse sind Treibstoff.

Die beiden wichtigen DGL sind: $\ddot{x}(t) = \frac{F - g \cdot M(t)}{M(t)} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

$$\dot{M}(t) = - \frac{0,85 \cdot M_0}{80} \left[\frac{\text{Kg}}{\text{s}} \right]$$

Berechnen Sie mit Zeitschritt $dt = 1$ [s] zwei Rechenschritte des numerischen Integrationsverfahrens nach Euler. Hinweis:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{neu} &= \dot{x}_{alt} + \ddot{x} \cdot dt \\ x_{neu} &= x_{alt} + \dot{x} \cdot dt \\ M_{neu} &= M_{alt} + \dot{M} \cdot dt\end{aligned}$$

(Lösung: $x_{neu} = 20,777$ [m] nach dem 2. Rechenschritt)

18. Löse die einfache DGL $\ddot{u} = t^2 - \cos(2t)$ mit Startwerten $u = 5$ und $\dot{u} = 2$.
(Lösung: $C_2 = 4,75$)

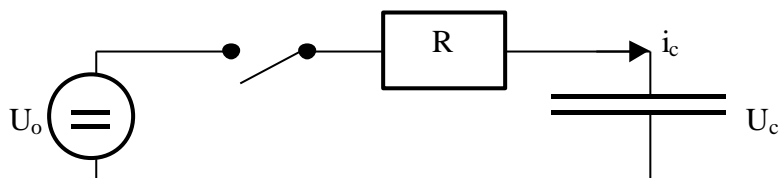
19. Löse mit Trennung der Variablen die DGL des Bakterienwachstums. Diese haben in einem neuen Medium eine Gewöhnungsphase, die sich mit Zeitkonstante T abbaut. D_s ist die Startdemenz. Die normale Wachstumsrate ist K [1/h]. Die DGL ist

$$y'(t) = K (1 - D_s e^{-t/T}) y$$

a) Berechne die Lösungsformel $y(t)$ nach der Methode « *Trennung der Variablen* »

- b) Berechne mit $T = 3$ [h], $D_s = 0,8$, $K = 0,015$ [1/h] und Startmasse $y_0 = 1$ [Kg] die Bakterienmasse zur Zeit $t = 10$ [h].
(Lösung: $y(10) = 1,122$ [Kg])

20. Separable DGL mit *Trennung der Variablen*. Ein Kondensator wird über eine Spannungsquelle U_0 aufgeladen. Dazwischen liegt ein Widerstand R .



Folgende kleinen Gleichungen sind vielleicht hilfreich:

$$Q \text{ [As]} = C \text{ [As/V]} \cdot U \text{ [V]} \quad R \text{ [V/A]} = U \text{ [V]} / i \text{ [A]} \quad i_c = C \cdot (dU_c / dt)$$

$$U_0 = U_R + U_c = R \cdot i_c + U_c = R \cdot C \cdot (dU_c / dt) + U_c$$

Die DGL ist: $\dot{U}_c(t) + \frac{1}{\tau} U_c(t) = \frac{U_0}{\tau}$ mit $\tau = R \cdot C$ [V/A]·[As/V]

a) Löse die DGL als separable DGL mit *Trennung der Veränderlichen*

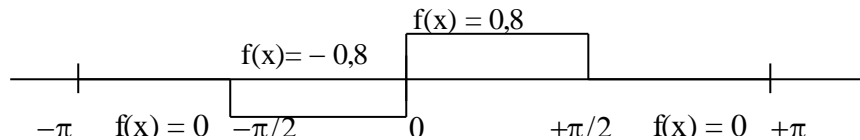
- b) Berechne Konstante C_1 aus $U_0 = 10$ [V] und Startwert $U_{c,0} = 0$ [V],
 $R = 3$ [K Ω], $C = 200$ [μ F], und berechne Spannung U_c für $t = 0,5$ [s]
(Lösung: $U_c(0,5) = 5,65$ [V])

21. a) Bestimme die Lösung der DGL $y'(x) = 2 - 3 \left(\frac{y}{x} \right)$ nach der Methode
Integration durch Substitution
 b) Bestimme Konstante C aus Startwert $y_0 = 100$ bei $x = 10$ (Lösung $C = 95000$)
 c) Bestimme $y(x)$ für $x = 5$ (Lösung: $y(5) = 762,5$)
22. a) Löse mit *Variation der Konstanten* DGL $y' + \frac{y}{x^2} = e^{1/x}$
 b) Bestimme Konstante C aus Startwert $y_0 = 5$ im Punkt $x = 2$ (Lösung $C = 1,0326$)
 c) Bestimme y im Punkt $x = 2,5$ (Lösung $y(2,5) = 5,27$)
23. Beispiel e-Ansatz mit zwei reellen Nullstellen $\alpha z''(u) + 7,3 z'(u) + \gamma z(u) = Z_B$
 mit $\alpha = 1,7$ $\gamma = 0,84$ $Z_B = 34,5$
 a) Bestimme die allgemeine Lösung $z(u)$ (Lösung $r_1 = -4,176$, $K = 41,07$)
 b) Bestimme eine Anfangswertlösung für $z_0 = 90$ und $z_0' = 7$
 (Lösung $C_1 = -3,147$ $C_2 = 52,007$)
 c) Tabellieren Sie die Lösung für $u = 0, 0.1, 0.5, 3, 10$. Machen Sie eine Skizze der Lösungsfunktion. Zeichnen Sie den Startanstieg als Vektor \mathbf{a} mit $\mathbf{a}_u = 1$ und $\mathbf{a}_z = z_0'$ ein. Gegen welchen Wert strebt die Lösung für $u \rightarrow \infty$?
 (Lösung: $u(0,5) = 89,77$)
24. Beispiel e-Ansatz $3 \ddot{x}(t) + 4.8 \dot{x}(t) + 1.92 x(t) = 4 + 2.5 \cdot t$
 mit reeller Doppelnullstelle
 a) Berechne die allgemeine Lösung $x(t)$ (Lösung: $K_0 = -1,1719$ $K_1 = 1,3021$)
 b) Bestimme eine Anfangswertlösung zu $t=0$, $x_0 = 7$ und $\dot{x}_0 = 3$ (Lösung $C_2 = 8,2354$)
 c) Bestimme $x(2)$ (Lösung: $6,4077$)
25. e-Ansatz mit einem konjugiert-komplexen Nullstellenpaar:
 Lösen Sie mit e-Ansatz die DGL mit konstanten Koeffizienten
 $6,5 y''(x) + 4,6 y'(x) + 1,2 y(x) = 2,8 \sin(\omega x)$ mit $\omega = 0,95$.
 Anfangswerte sind $y_0 = 8,2$ und $y_0' = 0$. Berechnen Sie die Lösungsfunktion $y(x)$
 (Lösung: $r = -0,3538 \pm 0,2437 \cdot i$ $K_1 = 1,06??$ $K_2 = -0,29??$ $A = 8,49?$ $B = 13,58?$
 $z(t=5) = 2,9??$)
26. Partialbruchzerlegung des Bruches $\frac{4p-7}{3p^2+2p-3}$ (Lösung $A = -0,65?$ $B = 1,98??$)
27. a) Lösung mit Laplace-Transformation der DGL $3.6 y' - 2.7 y = 4.5 t$

und den Startwerten $t_0=0$ und $y_0=0$.
 (Lösung $y(t) = -2,222 - 1,666 t + 2,222 e^{+0,75 t}$)

b) Tabellieren Sie die Lösung für $t = 0, 0.2, 0.4, 1.0$ und machen Sie eine Skizze.

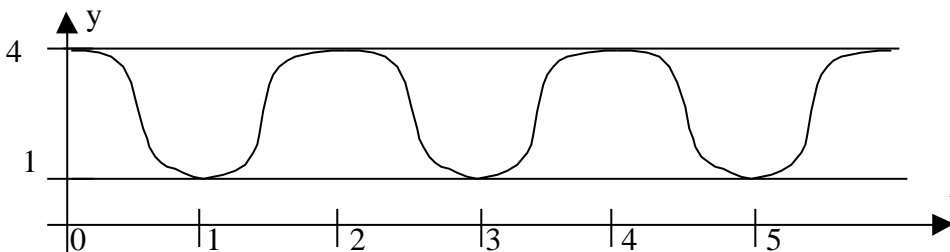
28. Berechnen Sie die allgemeine Formel für die Fourierkoeffizienten der mit der Periode 2π periodischen ungeraden Rechteckschwingung $f(x)$.



(Lösung: Nur b-Koeffizienten, da ungerade Funktion. Z.B. $b_3 = 0,169$)

29. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_1 und b_2 einer periodischen Messreihe. Die Messreihe ist $f = 0, 2, 4, 7, 0, 1$ mit $n=6$ Messwerten in einer Periode.
 (Lösung $a_1 = 3,1666$ $b_2 = -0,866$)

30. a) Bestimme zur Funktion $y(t) = y_0 + A \sin(\omega t + \phi)$ aus der folgenden Graphik die 4 Zahlen y_0, A, ω, ϕ



- b) Berechnen Sie zur Kontrolle die Werte $y(1,5)$ und $y(3,0)$ und vergleichen Sie die Werte mit der Graphik

(Lösung zu a: $y_0 = 2,5$ $A = 1,5$ $\omega = \pi$ $\phi = 0,5\pi$)

- c) Bestimme y_0, A, ω, ϕ einer Sinuswelle $y(t) = y_0 + A \sin(\omega t + \phi)$ mit der mittleren Höhe 7.3 , Minima 4.0 , Zeitpunkt des ersten Minimums $t_{1,\min} = 4,8$ [s], Zeitpunkt des zweiten Minimums $t_{2,\min} = 8,75$ [s],

(Lösung zu c: $y_0 = 7,3$ $A = 3,3$ $\omega = 1,5907$ $\phi = -2,9229$)

- d) Berechnen Sie zur Kontrolle $y(4,8)$ und vergleichen Sie den Wert mit den Vorgaben

17. Übungsklausur Mathematik 2, BT/UV

Rechnen Sie immer mit 4 Stellen nach dem Komma in allen Aufgaben!

1. (10 P) Lösen Sie nach Gauß-Elimination oder Gauß-Jordan das folgende lineare Gleichungssystem und machen Sie die Probe. Geben Sie Zwischenresultate an!

$$\begin{aligned} 4.5x - 3.0y + 6.0z &= 30.75 \\ -3.0x + 6.0y + 1.5z &= -26.25 \\ 1.5x + 4.5y - 3.0z &= -16.50 \end{aligned}$$

$$\text{Lös.: } \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 4 & 5,5 \\ 0 & 5,5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,8333 \\ -5,75 \\ -26,75 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2,25 \\ 0 & 1 & 1,375 \\ 0 & 0 & -12,5625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,8749 \\ -1,4375 \\ -18,8437 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ -3,5 \\ 1,5 \end{bmatrix} \quad \text{Probe: } 4,5 \cdot 2,5 - 3 \cdot (-3,5) + 6 \cdot 1,5 = 30,75$$

2. (13 P) Bestimmen Sie mit Angabe von Zwischenschritten die Werte der beiden Integrale mit $K=17,3$, $\rho_0=5$ und $\tau=1,5$

$$M = \int_{y=0}^4 \int_{w=0}^6 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_0 (y - \tau) w^2 d\varphi dw dy \quad N = \int_{u=0,5}^{1,5} \int_{y=\cos(3u)}^{\cos(4u)} \int_{\psi=0}^{\pi} K d\psi dy du$$

$$\text{Lös.: } M = 72 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{y^2}{2} - 1,5y \right]_0^4 = 4523,8934$$

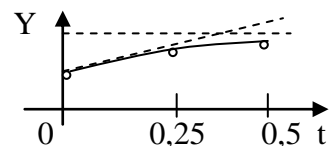
$$N = 17,3 \cdot \pi \cdot \left[\frac{1}{4} \sin(4u) - \frac{1}{3} \sin(3u) \right]_{0,5}^{1,5} = 19,6283$$

3. (10 P) a) Lösen Sie nach der Methode "Trennung der Veränderlichen" mit $\alpha=3$ und $\Theta=4$ und Startpunkt $y_0=0,5$ bei $t_0=0$ die DGL

$$\dot{y}(t) + \alpha \cdot y(t) = \Theta$$

$$\text{Lös.: } y = \frac{1}{3} (4 - C \cdot e^{-3t}) \quad \text{mit } C=2,5$$

b) Machen Sie eine Skizze der Lösung mit Startpunkt und Werten $y(t)$ für $t=0,25$ und $t=0,5$



$$\text{Lös.: } t=0,25 \text{ gibt } y=0,9397 \quad t=0,5 \text{ gibt } y=1,1474$$

(Zeichnung ohne die gestrichelten Linien)

c) Welcher Wert stellt sich für $t \rightarrow \infty$ ein? Lös.: $y \rightarrow 4/3$

d) Für Freaks: Bei welchem t genau schneidet die Tangente an den Startanstieg die Gerade $y=4/3$? Zeichnen Sie die Tangente und den Schnittpunkt in die Skizze zu Punkt b) mit ein.

$$\text{Lös.: } \dot{y}_0 = 4 - 3y = 4 - 3 \cdot 0,5 = 2,5 \quad \Delta y / \Delta t = \frac{4/3 - 0,5}{\Delta t} = 2,5 \rightarrow \Delta t = 0,3333$$

(In der Graphik die gestrichelten Linien)

4. (14 P) a) Lösen Sie mit e-Ansatz für $\omega=0.65$, $K_p=15$, $\mu=8$, $\delta=3.2$, $\chi=3$, $y_0=1$, $y_0'=0$ die DGL

$$\mu \cdot \ddot{y}(t) + \delta \cdot \dot{y}(t) + \chi \cdot y(t) = K_p \sin(\omega \cdot t)$$

Lös.: $r_{1,2} = -0,2 \pm 0,5788$ $y_h = e^{-0,2t} (A \cos(0,5788 t) + B \sin(0,5788 t))$

$$y_{sp} = K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t) \quad K_1 = -1,2749 \quad K_2 = -6,9786$$

$$y = e^{-0,2t} (A \cos(0,5788 t) + B \sin(0,5788 t)) - 1,2749 \sin(\omega t) - 6,9786 \cos(\omega t)$$

$$A=7,9786 \quad B=4,1887$$

b) Zeichnen Sie eine Skizze der Lösung mit Startpunkt, Startanstieg und Wert $y(t)$ für $t=1$



Lös.: $y(1)=1,0168$

c) Wie lautet die Formel der Lösung, die für $t \rightarrow \infty$ übrig bleibt?

Lös.: $y(t \rightarrow \infty) = -1,2749 \sin(0,65 t) - 6,9786 \cos(0,65 t)$

d) Welche Kreisfrequenz ω müsste die Störfunktion im Resonanzfall haben?

Lös.: $\omega = 0,5788$

5. (12 P) a) Bestimmen Sie die Formeln und Zahlenwerte der beiden partiellen Ableitungen der Funktion $E(\lambda, x)$ im Punkt $P=(\lambda, x)=(3.0, 4.0)$ für $E_0=12$, $\lambda_0=2.4$, $\gamma=0.2$ und $k=0.5$ mit

$$E(\lambda, x) = E_0 + (\lambda_0 - \lambda)^2 (e^{\gamma \cdot x} - kx)$$

Lös.: $E_\lambda = -2(2,4 - \lambda)(e^{0,2x} - 0,5x) = 0,2706$

$$E_x = (2,4 - \lambda)^2 (0,2e^{0,2x} - 0,5) = -0,0198$$

b) Berechnen Sie den Anstieg E_∇ in Gradientenrichtung und den Winkel α in Grad, den der Gradient mit der λ -Achse bildet (die λ -Achse zeigt nach rechts).

Lös.: $E_\nabla = \sqrt{0,2706^2 + (-0,0198)^2} = 0,2713$ $\alpha = \arctan(-0,0198/0,2706) = -4,18^\circ$

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung E_β zur Richtung $\beta=45^\circ$.

Lös.: Vektor $\vec{e}_\beta = (0,7071, 0,7071)$ $E_\beta = \vec{e}_\beta \cdot \nabla E = 0,1773$

d) Für Freaks: Wo liegt das Minimum der Funktion $E(\lambda, x)$, d.h. der Punkt $P_M=(\lambda_{\min}, x_{\min})$?

Lös.: $\lambda_{\min} = 2,4$ $x_{\min} = 0,2e^{0,2x_{\min}} - 0,5 = 0$ $e^{0,2x_{\min}} = 2,5$ $x_{\min} = \ln(2,5)/0,2 = 4,5815$

Klausur Mathematik 2 für BPT2, WS 2010/2011

1. (12 P) Berechnung 3-fach-Integral $U = \int_{z=0}^H \int_{y=0}^{\sin(x)} \int_{x=0}^{\pi/2} \beta e^{-0,3 \cdot z} dx dy dz$

mit $H = 1,7$ und $\beta=14,2$.

Integrieren Sie zuerst über y , dann über x , zuletzt über z . Schreiben Sie mindestens drei Zwischenergebnisse (Formeln) der Integrationen auf. Das letzte Integral lösen Sie direkt bzw.

numerisch mit dem TR (Numerische Integration mit dem TR gibt aber 1 Punkt Verlust.)

$$\begin{aligned} \text{Lös.:} \quad U &= 14,2 \int_z \int_x e^{-0,3z} \sin(x) dx dz = 14,2 \int_z [e^{-0,3z} (-\cos(x))]_0^{\pi/2} dz \\ U &= 14,2 \int_z e^{-0,3z} dz = 14,2 \left[-\frac{1}{0,3} e^{-0,3z} \right]_0^{1,7} = 18,91 \end{aligned}$$

2. (13 P) Gegeben ist das 2x2-Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, $\begin{pmatrix} 9,4 & 3,6 \\ 3,6 & 4,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,4 \\ -8,6 \end{pmatrix}$.

- Lösen Sie das kleine Gleichungssystem nach Cramer (Division von Determinanten) mit Probe.
- Berechnen Sie die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 der Matrix A (Polynomnullstellen).
- Berechnen Sie den unnormierten Eigenvektor $\vec{x}_{1,u}$ zum Eigenwert λ_1 .
- Berechnen Sie das Produkt Matrix mal Vektor, $\vec{c} = A \cdot \vec{b}$ mit Matrix A und Vektor \vec{b} von oben.

$$\begin{aligned} \text{Lös. a)} \quad D &= 31,22 \quad x_1 = (12,4 \cdot 4,7 + 8,6 \cdot 3,6) / D = 2,8584 \\ x_2 &= (-9,4 \cdot 8,6 - 3,6 \cdot 12,4) / D = -4,0192 \quad \text{Probe Gl.1: } 12,3998 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lös. b)} \quad (9,4 - \lambda)(4,7 - \lambda) &= \lambda^2 - 14,1\lambda + 31,22 \rightarrow \lambda_{1,2} = 7,05 \pm 4,299 \\ \lambda_1 &= 11,349 \quad \lambda_2 = 2,751 \end{aligned}$$

Lös. c)

$$\vec{x}_{1,u} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_{11} = 1 \quad \text{gesetzt} \rightarrow 9,4 + 3,6 \cdot x_{21} = 11,349 \rightarrow x_{21} = 0,541$$

$$\text{Lös. d)} \quad \begin{pmatrix} 9,4 & 3,6 \\ 3,6 & 4,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12,4 \\ -8,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85,6 \\ 4,22 \end{pmatrix}$$

3. (9 P) Gegeben ist die DGL $\Phi \dot{z}(x) + (2 + 3x)z = 0$ mit $\Phi = 5$

- Bestimmen Sie die Lösungsfunktion $z(x)$ nach der Methode „Trennung der Veränderlichen“.
- Bestimmen Sie die Integrationskonstante C aus dem Startwert $z_0 = 2$ bei $x = 1$.
- Berechnen Sie den Wert der Lösung $z(x)$ für $x = 2,5$.

$$\text{Lös. a)} \quad 5\dot{z} + (2 + 3x)z = 0 \rightarrow \int \frac{1}{z} dz = \int \left(-\frac{2}{5} - \frac{3}{5}x \right) dx \rightarrow \ln(z) = -\frac{2}{5}x - \frac{3}{10}x^2 + \ln(C)$$

$$z = C e^{-(2/5)x - (3/10)x^2}$$

$$\text{Lös. b)} \quad z_0 = 2 \quad \text{bei} \quad x = 1 \quad 2 = C e^{-0,4 - 0,3} \quad 2 = C \cdot 0,49658 \quad C = 4,02751$$

$$\text{Lös. c)} \quad z(2,5) = 0,227$$

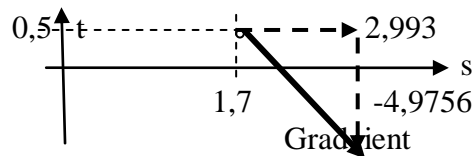
4. (10 P) Gegeben ist die Funktion zweier Veränderlicher $K(s, t) = \frac{(4s - 7t)^2}{7 + 2s - 5t}$.

- Geben Sie die Formeln für die beiden partiellen Ableitungen K_s und K_t an.
- Berechnen Sie den Gradienten ∇K im Punkt $(s, t) = (1,7, 0,5)$
- Machen Sie eine Skizze des Gradientenpfeils im Koordinatensystem s-t am Berechnungspunkt

Lös. a)
$$K_s = \frac{2(4 \cdot 5 - 7t) \cdot 4 \cdot (7 + 2s - 5t) - (4s - 7t)^2 \cdot 2}{(7 + 2s - 5t)^2}$$

$$K_t = \frac{2(4 \cdot 5 - 7t)(-7)(7 + 2s - 5t) - (4s - 7t)(-5)}{(7 + 2s - 5t)^2}$$

Lös. b) $s=1,7 \quad t=0,5 \quad K_s=2,993 \quad K_t=-4,9756 \quad \vec{\nabla}K = \begin{pmatrix} 2,993 \\ -4,9756 \end{pmatrix}$



Lös. c)

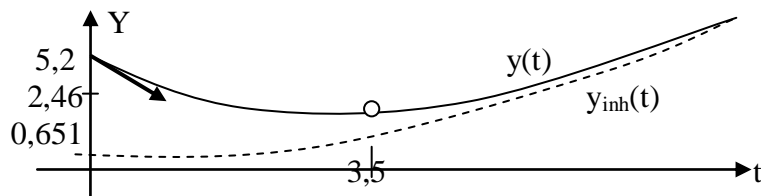
5. (15 P) DGL: $a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = 3 \cdot e^{0,3t}$ mit $a_2=1,2$, $a_1=6$, $a_0=2,7$.

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mittels e-Ansatz. Notieren Sie wichtige Zwischenresultate.
- Bestimmen Sie die Konstanten C_1 , C_2 mit den Startwerten $y_0 = 5,2$ und $\dot{y}_0 = -0,5$ für $t = 0$.
- Berechnen Sie den Wert der Lösung $y(t)$ für den einen Punkt $t = 3,5$.
- Machen Sie eine Skizze mit Startpunkt, Startanstieg, Punkt $y(3,5)$, Lösung (durchgezogen) und inhomogener Lösung (gestrichelt).

Lös. a) charakt. Gleichung $1,2 r^2 + 6r + 2,7 \quad r_{1,2} = -2,5 \pm 2 \quad r_1 = -0,5 \quad r_2 = -4,5$
 $Y_{\text{hom}}(t) = C_1 e^{-0,5t} + C_2 e^{-4,5t}$ Inhomogener Ansatz: $y = K e^{0,3t}$
 mit $\dot{y} = 0,3 K e^{0,3t}$ und $\ddot{y} = 0,3^2 K e^{0,3t}$
 Koeff.-vergleich: $1,2 \cdot 0,3^2 K + 6 \cdot 0,3 K + 2,7 K = 3$ gibt $K = 0,651$
 $y(t) = C_1 e^{-0,5t} + C_2 e^{-4,5t} + 0,651 e^{0,3t}$

Lös. b) $y_0 = 5,2$ und $t=0$ in $y(t)$ eingesetzt gibt $5,2 = C_1 + C_2 + 0,651$ oder $C_1 + C_2 = 4,549$
 $\dot{y}(t) = -0,5 C_1 e^{-0,5t} - 4,5 C_2 e^{-4,5t} + 0,3 \cdot 0,651 e^{0,3t}$ und mit $\dot{y}_0 = -0,5$ und $t=0$
 Erhalten wir $-0,5 = -0,5 C_1 - 4,5 C_2 + 0,1953$ oder $0,5 C_1 + 4,5 C_2 = 0,6953$
 Löse Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,5 & 4,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,549 \\ 0,6953 \end{pmatrix} \quad C_1 = 4,9438 \quad C_2 = -0,3948$
 Allg. Lösung: $y(t) = 4,9438 e^{-0,5t} - 0,3948 e^{-4,5t} + 0,651 e^{0,3t}$

Lös. c) $y(3,5) = 2,4622$



Lös. d)

6. (14 P) Verschiedenes:

- Drehen Sie den Vektor $\vec{a} = (2, -3, 4)$ um 21° um die x-Achse. Nennen Sie ihn dann \vec{a}_d .
- Machen Sie aus obigem originalen Vektor \vec{a} den Einheitsvektor \vec{e}_a .

- c) Wandeln Sie die Koordinaten $(x, y, z) = (-4, 7, 2)$ in Zylinderkoordinaten r, ϕ, z um. Den Winkel ϕ geben Sie in Gradmaß und in Bogenmaß an.
- d) Machen Sie die Partialbruchzerlegung des Bruches $\frac{5p + 13}{p^2 - p - 12}$ in zwei einfache Brüche

Literatur

L.Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd. 1 und 2, Vieweg-Verlag
 bzw. K.Weltner, Mathematik für Physiker, Bd. 1 und 2, Vieweg-Verlag
 Stöcker, Taschenbuch math. Formeln und moderner Verfahren, Harri Deutsch Verlag
 A.Makarov, Regelungstechnik und Simulation, Vieweg (speziell LAPLACE-Transformation)

References

18. Wörter der Mathematik - Dictionary of Mathematical Words

Wie spricht man Formelzeichen aus?

+ -	add, addition, subtract, -ion
x	multiply, multiplication
/	divide, division
3+5, 5-3	3 and 5., 3 plus 5, 5 minus 3
7 x 8	7 times 8, 7 multiplied by 8
7 / 8	7 divided by 8
...=8	...are 8, ...make 8, ... gives 8
+3, -3, ±3	plus 3, minus 3, plus or minus 3
(a+b)/c	a plus b over c, a+b divided by c
x/a = b/c	x is to a as b is to c
a=b	a equals b, a is equal to b
≠, >, ≤	is not equal to, greater than is less or equal to
y→∞	y is indefinitely great
x !	factorial x
x ⁿ	n-th power of x, x raised to the n-th power
x ² , x ³ , x ⁰	x squared, x cubed, zero power of
√, √9	radical sign, root of, square root
()	parentheses, curved brackets,
[]	brackets open, brackets closed
{ }	braces
0	nought (sprich wie „o“ in show),
0.3	zero point 3, o point 3, nought point three
11.70	eleven point seven o
½	a half, one half
1/3	a third, one third
¼	a quarter, one quarter
5/8	five-eights
x/6	x over six
f(x), x', x ^{cc}	function of x, x prime, x double pr.
x ₁ , x _n	x sub one, x sub n
x → a	x approaches the limit a
x Betrag x	absolute value of x

abhängig, unabhängig	dependent, independent
ablehnen (Hypothese)	reject
Ableitung, erste, höhere	derivative, first, higher
Abnahme, Niedergang	decay
Abweichungsquadrat	square of residuals
Achse, Achsen	axis, axes
Additionstheorem	addition theorem
akzeptieren (Hypothese)	accept
Amplitude	amplitude
Änderung	alteration, change
Anfangswertproblem	initial value problem
Ankathete	adjacent side, adj. leg
Annahme, Voraussetzung	assumption
Anstieg (Regression)	slope, slope-parameter
Anstieg einer Kurve	slope, inclination
Anteil, nichtlinearer A.	part, nonlinear part
Ansatz (z.B. e-Ansatz)	statement, e-statement
arithmetisches Mittel	arithmetic mean
asymptotisch	asymptotical
Auflösen einer Gleichung	resolving of an equation
aufspannen, von a und b aufgespannt	stretch, stretched by a and b
Ausbreitung (Wellen)	propagation of waves
Ausgleichskurve	fitted curve
Ausreißer (Datenwert)	outlier

Balkendiagramm	bar chart
berechnen	compute, evaluate
beschreibende Statistik	descriptive statistics
bestimmen	determine
Bahnkurve	trajectory
bedingte Wahrscheinlichk.	conditional probability
Beobachtung, Fall	observation, case
Beschränkung (Grenze)	constraint
Bestimmung numerische	numerical determination
Beweis, -methode	proof, method of proof
Bildbereich	Laplace-domain
Bogen, Bogenmaß	arc, radian measure,

Wörter

words

Abbildung, lineare - map, linear map

Breite

angular measure
width

Bruch, gemeiner, echter	fraction, vulgar, proper	Glockenkurve	bell-shaped curve
Bruchstrich	fraction bar, - line	Grad, Gradmaß	degree, degree measure
Charakteristische Gleich.	characteristic equation	Gradient	gradient
Darstellung, graphische	graphical representation	Grenzwert	limit, limiting value
Dezimalstelle	decimal place	Größe, Variable	quantity, variable
Diagramm	chart, diagram, plot	Grundgesamtheit	population
Dichteverteilung, -kurve	density function	Häufigkeitsverteilung	frequency distribution
Differenzialquotient	differential quotient	Histogramm	frequency diagram
Differenzialrechnung	differential calculus	Höhe, Höhenlinie	altitude, contour (line)
Differenziationsregel	differentiation rule	homogen	homogeneous
differenzieren	differentiate	Hyperbel	hyperbola
Differenzierbarkeit	differentiability	Hypotenuse	hypotenuse
diskrete Verteilung	discrete distribution	Hypothesentest	hypothesis test
Dreibein, Koordinatendr.	coordinates trihedral	Integral, unbestimmtes	integral, indeterminate
Dreieck	triangle	- bestimmtes	definite integral
Durchschnitt, Mittelwert	average, mean (value)	- uneigentliches	improper integral
Eigenschaft	characteristic feature, property	integrieren, Integration	integrate, integration
Eigenwert, Eigenvektor	eigenvalue, eigenvector	Irrtumswahrscheinlichkeit	(level of) significance, error probability
Einflussgröße	independent variable	Kartesische Koordinaten	Cartesian coordinates
Einheitskreis	circle with radius 1	kategoriale Daten	categorical data
Einheitsvektor	unit vector	Kegel, -spitze, -mantel	cone, - point, - envelope
einseitig, einseitiger Test	one-sided, one-sided test	Kettenregel	chain rule, component rule of three
einsetzen, x in Gl. 3 --	put in x into equation 3	Klassenbreite	width of class interval
Eliminationsverfahren	elimination algorithm	Klasseneinteilung	classification
Ellipse, elliptisch	ellipse, elliptic	Kleinste-Quadrate-Schätzung	least squares estimation
empirisch, -e Daten	empirical/observed data	Konfidenzintervall	confidence interval
Ereignis	event	komplexe Zahl, - Wurzel	complex number, - root
Erhebung (von Daten)	survey, data collection	kontinuierlich	continuous
Erwartungswert	expectation (value)	Konvergenz	convergency
Exponentialfunktion	exponential function	Koordinatenursprung	origin of coordinate syst.
exponentielles Wachstum	exponential growth	Kreis, Kreisumfang	circle, circumference
Fall, Beobachtung	case, observation	Kreisdiagramm	pie chart, circular chart
falsch (Logik)	false	Kreisfrequenz	angular frequency
Fehler 1. Art	error type 1	Kugel, kugelförmig	sphere, spherical
Fehlerabschätzung	error estimate	Kurbelgetriebe	crank mechanism
Fehlerfortpflanzung	error propagation	Kurvenanpassung	curve fitting
Fehlerquadratsumme	error sum of squares	Länge	length
Fehlerrechnung	error calculus	Liniendiagramm	line plot
Feld	array, field	Lösung	(re)solution, answer
Fläche, Ober-, Ebene	area, surface, plane	logisch, Logik	logical, logic
Folge, Reihe	sequence, series	Maßstab, Maßeinheit	scale, measurement unit
Form, Eulersche Form	shape, Eulerian shape	Matrix, -zen, Drehmatrix	matrix, -ces, rotation m.
Formel	formula	Matrizenrechnung	matrix calculus
Fourierreihe, -analyse	Fourier series, - analysis	maximieren	maximize
Freiheitsgrad	degree of freedom	Menge, Mengenlehre	set, set theory
Gegenkathete	opposite leg	Merkmal (Variable)	symptom, variable
Geländeprofil	topographical profile	Messreihe	series of measurements
Genauigkeit	precision	Meter, Quadrat-, Kubik-	square -, cubic metre
geometrisches Mittel	geometric mean	metrisch	metric
Gerade, -ngleichung	straight line, -- formula	minimieren	minimize
Gesetz, Theorem	law, theorem	Mittel, Mittelwert	mean (value), average
Gestalt (einer Kurve)	shape, curve shape	Mittelwertmaße	measures of central tendency
gewichtetes Mittel	weighted average	mittelbare Funktion	mediate function
gewöhnliche DGL (ODE)	ordinary defferential eq.	Mittelwertvergleich	comparision of group
Gleichungssystem	system of equations		
Glied (einer Summe)	member		

	centroids	Satz, Haupt-	theorem, main theorem
mittlerer Fehler	mean error	- von Pythagoras	Pythagorean theorem
Näherung, erste Näh.	approximation, first app.	schätzen	assess, estimate
Näherungspolynom	approximate polynomial	Schätzwert	assessed/estimated value
Neigungswinkel	angel of inclination	Scheitelpunkt	summit of a curve
Nenner, Zähler	denominator, numerator	Schließen, (Folgern)	reasoning, inference
Norm, normieren	norm, to norm	Schnittpunkt	point of intersection
Normalverteilung	normal distribution	Schwerpunkt	centre of gravity
Nullstelle, -vektor	root / zero, zero vector	Schwingung	oscillation
Nullhypothese	null hypothesis	Sehne, Sekante	chord
numerische Lösung	numerical solution	senkrecht, steht - auf	is perpendicular to
		Sicherheit (statistische)	(statistical) significance
		Sicherheitspunkt	critical point,
optimieren	optimize		significance limit
Ort	position	senken	decrease, lower, decline
Ortskurve	Nyquist diagram	Skalarprodukt	inner -, scalar product
Ortsvektor	radius -, position vector	Skizze	rough sketch, draft
		Stammfunktion (Integr.)	antiderivative
Paar (a,b)	pair (a,b)	Standardabweichung	standard deviation
Parabel	parabola	Statistik	statistics
parallel zu	is parallel to	steigen	increase, rise, ascend
Parameterdarstellung	parametric representation	Stetigkeit	continuity
Partialbruch, -zerlegung	partial fraction, expansion in partial fractions	Stichprobe, -ngröße	sample, sample size
partielle Ableitung	partial derivative	streuen (Punkte)	scatter
Periode, periodisch	period, periodical	Streumaß	measure of spread, - of dispersion
Phase	phase	Summenkurve	cumulative distribution
Pol (einer Funktion)	pole of function		
Polynom, Polygon	polynomial, polygon	Tangente	tangent (line)
Prognose, Vorhersage	prediction, forecasting	Teilung (Maßstab)	graduation, division
Prozent	per cent	Theorem, Gesetz	theorem, law
Prüfgröße, Teststatistik	test statistic	Tiefe	depths
Prüfverteilung	test distribution	Trägheitsmoment	moment of inertia
		Transformation, Laplace-	transform, Laplace -
Quadrat, Quadratwurzel	square, square root	trigonometrische Funkt.	trigonometric function
		Tripel (a,b,c)	triple (a,b,c)
		Tupel (a,b,c,...)	tuple, n-tuple (a,b,c,...)
Radialsymmetrie	radial symmetry		
Radiant	radian	Umfang	perimeter
Randsumme	marginal sum, - total	Umkehrfunktion	inverse function
Randbedingung	boundary condition	Unabhängigkeit	independence
Randwertproblem	boundary value problem	Unbekannte	unknown quantity, - var.
Rang einer Determinante	rank of a determinant		
ranggeordnet	rank ordered	Vektor, -rechnung	vector, vector calculus
Real-, Imaginärteil	real/imaginary part	Vektorprodukt (Kreuzp.)	vector-, cross-, outer product
Rechnung, Differenzial-	differential calculus		
Rechteck, rechter Winkel	rectangle, right angle	Venn-Diagramm	Venn diagram
Rechteckschwingung	rectangular oscillation	Verschiebung	displacement
rechtwinklig	rectangular	(z.B. Koordinaten)	coordinates displacement
rechtwinkliges Dreieck	right triangel	Verteilung, Normal-	distribution, normal dist.
reelle Zahl	real number	Viereck	quadrangle
Regel, Cramersche -	rule, Cramer's rule	Volumen	volume
Regelkreis	closed control loop	vorausgesetzt, dass x ..	provided x is ...
Regression, einfache	simple regression	Vorhersage, Prognose	prediction, forecasting
- skoeffizient	regr. coefficient, slope		
- skonstante	regr. constant, intercept	Wachstum	growth
Reihe, Taylorreihe	series, Taylor series	wahr (Logik)	true
- geometrische	geometrical series	Wahrscheinlichkeit	probability, likelihood
Reihenentwicklung	expansion into a series	Wahrsch.-rechnung	probability calculus
Reststreuung	residual scattering	Wellengleichung	wave equation
Richtungsableitung	directional derivative	Wendepunkt (Funktion)	flex point
ringförmig	ring-shaped, toroidal	Wertetabelle	table of values
		Winkel, -funktion	angle, trigonometric f.

Würfel, -förmig	cube, cube-shaped
Zähler, Nenner	numerator, denominator
Zahl, Ziffer	number, digit
Zeichen, Wurzelzeichen	sign, radical sign
Zeitbereich	time-domain
Ziehung, ziehen (Los)	the draw, draw
Zielgröße	dependent variable
Zufallsvariable, -ereignis	random variable, r. event
Zusammenhang	relationship, association
zweiseitig, -er Test	two-sided, two-sided test
Zylinder, zylindrisch	cylinder, cylindrical