

Zufall und Wahrscheinlichkeit

Die Frage nach der Existenz des Zufalls gehört zu den wirklich großen Fragen, die Philosophen und Naturwissenschaftler seit Jahrhunderten beschäftigen. Vom 16. Jahrhundert an entdeckte die Wissenschaft – angeführt von Isaac Newton und anderen – in rascher Folge immer neue physikalische Gesetzmäßigkeiten. Ein deterministisches Weltbild erschien deshalb immer plausibler. Determinismus bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Naturgesetze so beschaffen sind, dass sie keinen Raum für irgendeinen Zufall lassen. Das heißt, wenn vollständig spezifiziert ist, wie das Universum in diesem Augenblick beschaffen ist, kann die Zukunft nur auf eine einzige, vorherbestimmte Weise ablaufen. Der französische Astronom und Mathematiker Pierre Simon de Laplace drückte diesen Sachverhalt 1814 in einigen oft zitierten Zeilen wie folgt aus:

Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als die Wirkung seines früheren und als die Ursache des folgenden Zustands betrachten. Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kannte, und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Größen der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Weltkörper wie des leichtesten Atoms umschließen; nichts würde ihr ungewiss sein und Zukunft wie Vergangenheit würden offen vor Augen liegen.¹

Dieses deterministische Weltbild wurde in der Zwischenzeit mehrfach in Frage gestellt. Der Durchbruch der Quantenmechanik in den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts führte zu heißen Diskussionen, wie diese Ergebnisse zu deuten sind. Der dänische Physiker Niels Bohr schlussfolgerte aus der Quantenmechanik, dass die Natur selbst im Kleinsten für Zufälle offen sei, während sich Albert Einstein gegen diese Deutung mit den berühmten Worten wandte, dass Gott nicht würfeln würde. Die heute vorherrschende Sichtweise auf die Quantenme-

¹Laplace (1814) in der deutschen Übersetzung von 1932.

chanik ist die so genannte *Kopenhagener Deutung* (so benannt, weil sie auf Bohr zurück geht). Wir haben an dieser Stelle keine Möglichkeit, darauf näher einzugehen, sondern begnügen uns damit zu erwähnen, dass der so genannte Kollaps der quantenmechanischen Wellenfunktion als echtes Zufallsphänomen aufgefasst wird. Diese Deutung ist jedoch nicht unproblematisch², und es existieren konkurrierende Theorien, von denen das deterministische Modell, das David Bohm in den 50er Jahren des 20. Jahrhunderts formulierte, am meisten respektiert ist.³ Die Streitfragen zur Quantenmechanik und zum Determinismus können momentan nicht als entschieden angesehen werden.⁴

Ein weiterer Angriff gegen den Determinismus, wie er von Laplace formuliert wurde, kam zu Beginn der 80er Jahre des letzten Jahrhunderts aus Richtung der Chaostheorie⁵. Für lesenswerte populärwissenschaftliche Einführungen in dieses Gebiet siehe Ekeland (1984) und Gleick (1987). Die Chaosforschung beschäftigt sich (unter anderem) mit so genannten sensitiven Abhängigkeiten vom Startwert. Dies bedeutet, dass zwei Systeme, die in fast dem gleichen Startzustand anfangen und dann beispielsweise von Newtons Kraftgesetzen getrieben werden, nach und nach voneinander abweichen und völlig

²Das größte Problem der Kopenhagener Deutung ist, dass behauptet wird, die Wellenfunktionen kollabieren in Folge von Interaktionen mit makroskopischen Phänomenen, was in der Regel dadurch beschrieben wird, dass man eine *Beobachtung* des Systems durchführt. Das ist recht verwirrend (wie definiert man den Begriff Beobachtung physikalisch exakt?) und man riskiert, in einem Zirkelschluss zu landen. Ein führender mathematischer Physiker drückt dies so aus, dass physikalische Erklärungen am Ende immer „einen reduktionistischen Weg verfolgen: Die Eigenschaften von ‚Objekten‘ werden mit denen ihrer Teile erklärt, die schließlich durch die Quantenmechanik beherrscht werden. Doch an dieser Stelle schweigt die Theorie plötzlich und spricht nur von makroskopischen Objekten, so dass der reduktionistische Weg zu einem Zirkelschluss führt“ (Bricmont, 1999).

³Was das Modell Bohms angeht, siehe z. B. Bell (1993), Albert (1994) und Bricmont (1999). Über die Quantentheorie im Allgemeinen, und speziell zu ihren philosophischen Konsequenzen, gibt es eine Vielzahl populärwissenschaftlicher Zusammenstellungen von variierender Qualität. Ein gutes Buch für den Anfang ist Lindley (1997). Es lässt sich leicht lesen (wenngleich es etwas zu weitschweifig ist) und vermeidet gleichzeitig den verbreiteten Fehler, morgenländischen Mystizismus einzustreuen. Außerdem sollte auch die bemerkenswerte populäre *Jagd auf Schrödingers Katze* (Gribbin, 1984) genannt werden. Während sich Lindley positiv für die Kopenhagener Deutung ausspricht, ist Gribbin skeptischer und zieht eher die spektakuläre „Viele-Welten“-Theorie vor.

⁴Siehe auch Kümmerer & Maassen (1998) und Gill (1998) für eine verwandte (und stimulierende) Debatte darüber, wie der quantenmechanische Zufall mit klassischer Wahrscheinlichkeitstheorie behandelt werden kann, oder ob man eine spezielle Quantenwahrscheinlichkeitstheorie (mit anderen Axiomen als die klassischen) benötigt.

⁵Damit ist nicht gesagt, dass die Chaostheorie zu dieser Zeit erfunden wurde: zentrale Teile gehen sogar auf bahnbrechende Arbeiten des französischen Mathematikers Henri Poincaré um 1890 zurück.

verschiedene Zustände erreichen. Dass die Welt reich an derartigen Phänomenen ist, steht außer Zweifel, und das populäre Bild vom Flügelschlag des Schmetterlings auf dem Platz des Himmlischen Friedens, der darüber entscheidet, ob es einige Monate später im Nordatlantik Sturm gibt oder nicht, ist im Prinzip sicherlich richtig.⁶ Das ist der Grund, weshalb die Wettervorhersagen bekanntlich so schwierig sind – je weiter wir die Prognosen in die Zukunft verlängern wollen, desto mehr wächst die Anforderung an die Genauigkeit der Startwerte und an die Rechnerkapazitäten, bis die Prognosen nicht mehr in zufriedenstellender Zeit bearbeitet werden können. Gemäß einer populären Auffassung bringt diese Tatsache Laplace's Weltbild zu Fall, weil sie es unmöglich macht, die Entwicklung des Weltalls in alle Zukunft vorherzusehen. Der Determinismus ist tot!

So einfach ist es natürlich nicht. Wie der belgische Physiker Jean Bricmont in seinem Artikel *Science of chaos or chaos in science*⁷ von 1995 zeigt, baut diese Kritik gegen Laplace und den Determinismus auf einer Vermischung der Begriffe Determinismus und Vorhersagbarkeit auf. Dass wir Menschen die Entwicklung eines physikalischen Systems nicht vorhersagen können, bedeutet nicht unbedingt, dass dieses System fundamental indeterministisch ist.⁸ Tatsächlich gibt es in der Chaostheorie nichts, was gegen den Determinismus spricht.



Die obige Diskussion hat bis heute keine entscheidenden Argumente zur Klärung der Frage gebracht, ob die Naturgesetze deterministisch oder stochastisch (d. h. dem Zufall unterworfen) sind. Wir wissen es einfach nicht. Vielleicht ist es sogar so, dass wir es nicht wissen *können*. Nehmen wir beispielsweise an, wir hätten ein physikalisches System, von dem wir zu wissen glauben, dass seine Dynamik vollkommen zufällig sei. Können wir uns dabei wirklich sicher sein, dass wir keinen Aspekt des Systems – z. B. eine früher völlig unbekannte Messgröße – vergessen haben, der eindeutig (also deterministisch) die weitere Dynamik des Systems definiert? Man kann sich schwer vorstellen, dass es möglich ist, darüber Gewissheit zu erreichen.

⁶Jedoch ist es offenbar nicht möglich, dies mit einem direkten Experiment zu beweisen – denn das würde erfordern, dass wir in der gesamten Atmosphäre und darüber hinaus zwei Mal exakt den gleichen Ausgangszustand, mit Ausnahme des kleinen Schmetterlings, herstellen.

⁷Bricmonts Artikel ist die beste Zusammenstellung, die ich zu diesen Fragen kenne. Sachlich und elegant korrigiert der Autor einige der meist genannten Missverständnisse zu Chaos, Determinismus und dem thermodynamischen Zeitpfeil. Demjenigen, der sich generell dafür interessiert, wie pompöse Pseudowissenschaft entlarvt wird, kann ich Sokal & Bricmont (1997) wärmstens empfehlen.

⁸Oder auf eine andere Weise ausgedrückt: Der Determinismus beinhaltet nicht Vorhersagbarkeit. Wie Bricmont (1995) nachweist, war sich Laplace darüber vollständig im Klaren, und Laplace betont sogar, dass wir Menschen immer „unendlich weit“ von der perfekten Intelligenz entfernt sein werden, die er sich im obigen Zitat vorstellt (siehe Fußnote 1 auf Seite 1).

Doch was glaube ich selbst? Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist die Mathematik des Zufalls und sollte ich als Wahrscheinlichkeitstheoretiker nicht auch eine Meinung zur Existenz des Zufalls haben? (Ich habe diese Frage schon mehrmals gestellt bekommen.) Sollte ich nicht zwangsläufig darauf *hoffen*, dass es den Zufall gibt? Wenn sich zeigen würde, dass es keinen Zufall gibt, würde ich dann nicht arbeitslos werden?

Nun, während wir auf den überzeugenden Beweis unserer Freunde, der Physiker, warten – einen Beweis, der möglicherweise nie erbracht wird – ziehe ich eine agnostische Haltung vor. Außerdem ist der Gedanke, die Wahrscheinlichkeitstheorie sei mit einem Schlag sinnlos, wenn wir einsehen würden, dass die Welt deterministisch ist, aus meiner Sicht falsch. Das hängt mit dem Unterschied von Determinismus und Vorhersagbarkeit zusammen, den wir bereits erklärt haben.⁹

Nehmen wir an, wir würden die grundlegendsten Naturgesetze kennen, die unsere Welt steuern, und sie wären deterministisch. Sie würden *alles* steuern, einschließlich sämtlicher Atome und Moleküle, aus denen ein Fußballspieler zusammengesetzt ist, und auch alles andere, was den Ausgang eines Fußballspiels beeinflussen kann. Das Ergebnis wäre somit vorherbestimmt, bevor das Spiel beginnt. Damit wäre jedoch nicht gesagt, dass wir das Ergebnis mit Hilfe von Naturgesetzen *vorhersagen* könnten. Um das zu können, würden wir ein extrem detailliertes Wissen über den Ausgangszustand benötigen – denn das kleinste Elektron im Gehirn des kreativen Mittelfeldspielers könnte einen entscheidenden Einfluss haben – ganz zu schweigen von der gigantischen Rechnung, die wir benötigen würden, um festzustellen, zu welcher Entwicklung des Spiels dieser Zustand führen würde.¹⁰ Man kann sich nur schwer vorstellen, dass irgendwann eine Analyse auf dem Niveau der Elementarteilchen bei der Fußball-Elferwette eher möglich ist, als die heutigen Spekulationen über Formkurven und Mannschaftsaufstellungen. Wir können damit rechnen, dass sich die Lottogesellschaften nicht von einem eventuellen Nachweis abschrecken ließen, dass die Naturgesetze prinzipiell deterministisch seien. Ohne Zweifel würden sie weiterhin Wetten auf Fußballspiele aussetzen, als wären sie zufällig.

⁹In den folgenden Abschnitten werde ich versuchen, glaubhaft zu machen (auch wenn das noch nicht zu einem Beweis führt), dass der Determinismus keine Bedrohung für die Wahrscheinlichkeitstheorie darstellt. Es gibt jedoch wichtigere Angelegenheiten, die in diesem Zusammenhang auf dem Spiel stehen würden: der freie Wille des Menschen. Jedoch argumentiert Dennett (2003), dass, wenn der freie Wille bedroht ist, es nicht in jedem Fall der Determinismus ist, von dem das Problem ausgeht. Dies ist nicht zuletzt vor dem Hintergrund interessant, dass es vermutlich die empfundene Bedrohung des freien Willens ist, die der Ursprung für die (oft gefühlsmäßig begründete) Ablehnung des Determinismus ist, die unter den Intellektuellen heute so verbreitet ist.

¹⁰Eine nur grobe Rechnung reicht nicht aus, wie beispielsweise der Lattenschuss von Anders Svensson in der Verlängerung des Spiels zwischen Schweden und dem Senegal in der Fußball-WM zeigt.

Prozesse und Verläufe wahrscheinlichkeitstheoretisch zu modellieren, hat sich in Situationen, in denen wir keine Möglichkeit haben, den Verlauf im Detail zu beschreiben und vorherzusehen, als fruchtbare Herangehensweise erwiesen. Ein Paradebeispiel hierfür ist die Modellierung der Ausbreitung eines Gases in einem Behälter. Die Anzahl der Moleküle ist so groß (in der Regel in der Größenordnung von 10^{23}), dass wir unmöglich die exakte Position und Geschwindigkeit aller Moleküle spezifizieren und verfolgen können. Mit einem stochastischen Modell mit Anfangszustand (d. h. einem Modell, welches Zufallsmöglichkeiten einbezieht) kann man jedoch *mit einer Wahrscheinlichkeit nahe Eins* approximativ vorhersehen, wie sich das Gas eine gewisse Zeit später verteilt haben wird¹¹; das ist es, was die statistisch-mechanische Grundlage der Thermodynamik ausmacht (Martin-Löf, 1979).

Es gibt mindestens einen weiteren guten Grund, Molekülbewegungen stochastisch zu modellieren. Auch wenn wir die exakte Ausgangslage und -geschwindigkeit der 10^{23} Moleküle präzisieren *könnten*, würde jeder Versuch, ihre weiteren Bewegungen exakt zu berechnen, durch Einflüsse von außen verkompliziert werden. Interaktionen zwischen den Molekülen innerhalb des Gasbehälters einerseits und andererseits allem, was außerhalb passiert, können klein sein, aber ihre Effekte wachsen exponentiell mit der Anzahl der Kollisionen zweier Moleküle. Sie tun dies in einem solchen Maße, dass einige Zehn dieser Kollisionen ausreichen, damit der Einfluss der Gravitation eines einzelnen Staubkorns z. B. in den Ringen des Saturns, einen Einfluss auf die Lage des Moleküls im Behälter hat! Wie Ekeland (1984) betont, ist es nicht möglich, den Einfluss auf das physikalische System, das wir analysieren, auszuschalten, in dem wir das betrachtete System auf das gesamte Universum erweitern. Das Zusammenwirken der unterschiedlichen Einflüsse ist damit in der Praxis unvermeidbar und außerhalb unserer Kontrolle, weshalb sich die Dynamik des physikalischen Systems teilweise unregelmäßig und zufällig verhält.

Die wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung und Analyse ist in Wissenschaft und Ingenieurkunst heute eine übliche Methodik. Wenn eine Brücke über den Öresund¹² konstruiert oder eine Verteilerstation für Mobiltelefone

¹¹Die sehr große Anzahl von Partikeln im System ist eine Voraussetzung für die große Sicherheit, mit der Größen, wie Druck und Temperatur, vorhergesagt werden können. Dagegen sollte man sich darüber im Klaren sein, dass es nur unter gewissen Umständen möglich ist (z. B. wenn ein System eine große Anzahl von Komponenten besitzt) derartige schöne Eigenschaften zu erhalten. Die Chaostheorie bietet interessante Beispiele für das Gegenteil, wie in der Geschichte oder den Gesellschaftswissenschaften. Es reicht schon aus, sich darüber Gedanken zu machen, welcher großer Teil der Geschichte des 20. Jahrhunderts eine Folge des Handelns eines geisteskranken Veterans des ersten Weltkriegs ist, um zu verstehen, dass ein Gegenstück zur fiktiven Psychogeschichte (eine statistische Methode, um mit großer Genauigkeit den historischen Verlauf der Zukunft vorherzusagen) im Roman *Foundation* (Asimov, 1951) vernünftigerweise nicht Wirklichkeit werden kann.

¹²Der Öresund ist die Meerenge zwischen der dänischen Insel Seeland und dem südschwedischen Schonen (Anm. d. Übers.).

dimensioniert werden soll, werden stochastische Modelle zur Modellierung des zu erwartenden Verkehrsflusses (des Auto- oder Telekommunikationsnetzes) eingesetzt. Natürlich ist es nicht möglich, den Verkehr mit einer solchen Genauigkeit vorherzusagen, dass man weiß, dass Herr und Frau Nilson aus Staffanstorp am 19. August um 16.08 Uhr in einem schwer beladenen Volvo am Brückenkopf in Malmö ankommen werden. Es ist nicht einmal möglich, exakt vorherzusehen, wie der Gesamtverkehrsfluss am heutigen Tag zwischen 16.00 und 18.00 Uhr sein wird. Jedoch hat man mit wohlabgewogenen Annahmen – die oft auf statistischen Untersuchungen basieren, etwa zu den gegenwärtigen oder künftigen Reisegewohnheiten der Bevölkerung – hervorragende Möglichkeiten, gute Schätzungen für das Risiko von Verkehrsstaus am Freitagnachmittag bei einer bestimmten Dimensionierung der Brücke zu erhalten.¹³



Vielleicht fragen sich jetzt einige der Leserinnen und Leser, wie man auf mathematische Weise rechnen und Voraussagen über etwas machen kann, das zufällig ist (oder als solches angenommen wird). In den nachfolgenden Kapiteln dieses Buches werden wir dafür genügend Beispiele finden. Begeben wir uns auf einen Streifzug durch die Wahrscheinlichkeitstheorie!

¹³Wie bekannt ist, ging bei der Öresundsbrücke etwas schief. Die Städteplaner mussten einige Zeit nach der Fertigstellung enttäuscht feststellen, dass die Gebühren für die Brückenüberfahrt nicht einmal annähernd so große Einnahmen wie vorhergesagt ergaben. Eine glaubhafte Erklärung ist vielleicht, dass sie sich zu sehr vom Zuwachsoptimismus haben blenden lassen, der die Öresundregion zu dieser Zeit bestimmte, so dass ihre Prognosen den Bezug zur Realität verloren hatten. Bevor wir sie jedoch zu hart richten, sollten wir auch beachten, dass mathematische Modellierungen und Vorhersagen von komplexen gesellschaftlichen Vorgängen sehr schwierig sind.