Lösungen

zur

Klausur Elektrotechnik 2 für PE 2

Sommersemester 2000

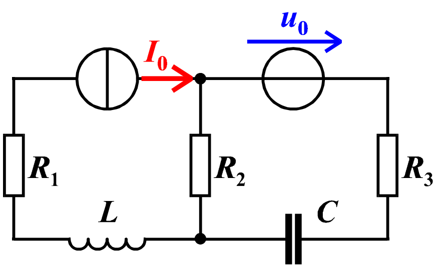
Anmerkung

Die Lösungen sind z.T. ausführlicher kommentiert
und diskutiert als es während einer Klausur möglich ist.

1 RLC-Schaltung

1.1 Stromzeitfunktion $i_2(t)$

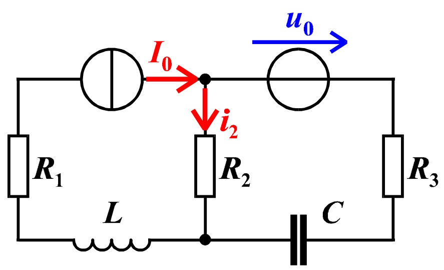
Gegeben

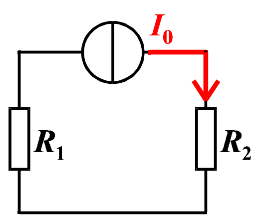


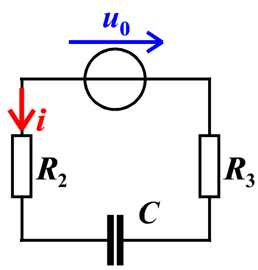
$$u_0 = \hat{u}_0 \sin(2\mathrm{p}ft);\; I_0$$
$$R_1 = R_2 = R_3 = R\,;\; C\,;\; L$$

Lösung mittels Superpositionsmethode

$$i_2(t) \quad = \quad I_0 \quad + \quad i(t)$$







Gegebene Schaltung und Festlegung von i_2.	Wirkung der Gleichstromquelle I_0 *Induktivität **L** ist Kurzschluss, Kapazität **C** ist Leerlauf (Spannungsquelle u_0 durch Kurzschluss ersetzt bleibt dadurch ohne Wirkung).*	Wirkung der Wechselspannungsquelle u_0 *Stromquelle durch Leerlauf ersetzt.*

$$i_2(t) = I_0 + i(t) = I_0 + \hat{i}\cdot\sin(2\mathrm{p}ft + j_i)$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}_0}{2R + \frac{1}{\mathrm{j}wC}} = \frac{\underline{u}_0}{2R - \mathrm{j}\frac{1}{wC}} = \frac{\underline{u}_0}{\underline{Nenner}} \qquad w = 2\mathrm{p}f$$

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{4R^2 + \frac{1}{w^2C^2}}} \qquad j_i = -\arctan\frac{\mathrm{Im}\{\underline{Nenner}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{Nenner}\}} = -\arctan\frac{-\frac{1}{wC}}{2R} = \arctan\frac{1}{2wCR}$$

$$\underline{\underline{i_2(t) = I_0 + \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{4R^2 + \frac{1}{w^2C^2}}}\cdot\sin\left(2\mathrm{p}ft + \arctan\frac{1}{2wCR}\right)}}$$

1.2 Im Widerstand R_2 umgesetzte Wärmeleistung P_2

Gegeben

$\hat{u}_0 = 1\,\mathrm{V}\,;\quad f = 796\,\mathrm{Hz}\,;\quad I_0 = 100\,\mathrm{mA}\,,$

$R_1 = R_2 = R_3 = R = 10\,\mathrm{W}\,;\quad C = 10\,\mathrm{mF}\,;\quad L = 1\,\mathrm{mH}$

Lösung

$$P_2 = \tilde{i}_2^{\,2} \cdot R_2 = \left(I_0^2 + \frac{\hat{i}^{\,2}}{2} \right) \cdot R = \left[I_0^2 + \frac{\hat{u}_0^2}{2 \cdot \left(4R^2 + \dfrac{1}{w^2 C^2} \right)} \right] \cdot R$$

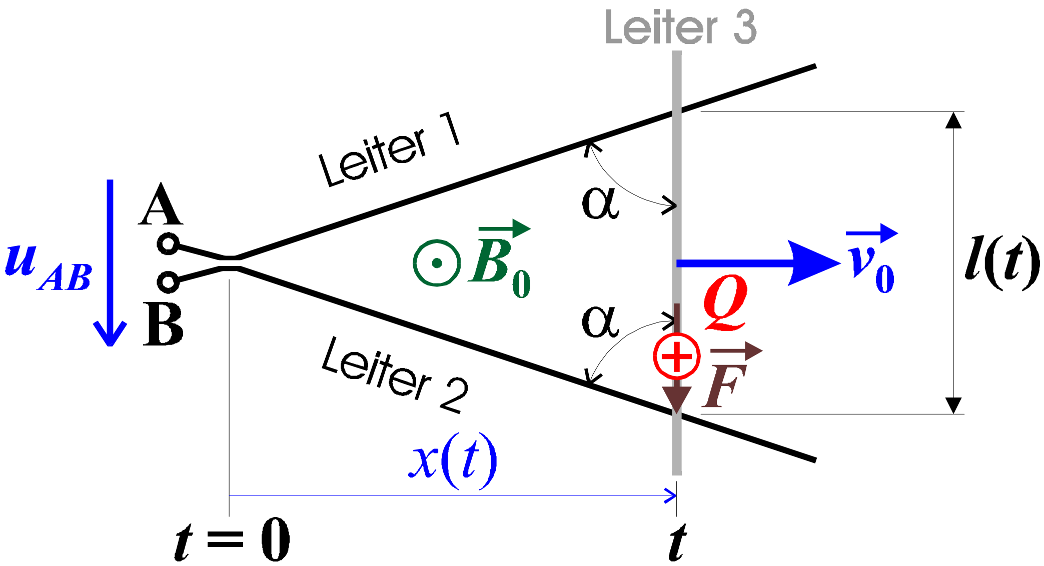
$$\underline{\underline{P_2 = 0{,}10625\,\mathrm{W}}}$$

$\hat{i} = 35{,}360\,\mathrm{mA}$

$\tilde{i}_2 = 103{,}078\,\mathrm{mA}$

2 Bewegungsinduktion

2.1 Zeitfunktion der Spannung $u_{AB}(t)$ zwischen Leiter 1 und Leiter 2



$u_{AB} = -B_0 v_0 \cdot l(t)$ **(1)**

Anmerkung zum Vorzeichen von u_{AB}

Die Lorentzkraft F verschiebt eine Probeladung Q in Richtung des **Leiters 2**, so dass die Klemme **B** den „Pluspol" darstellt. u_{AB} ist also negativ.

Lorentzkraft $\vec{F} = Q \cdot \vec{v}_0 \times \vec{B}_0$

Aus $\tan a = \dfrac{x(t)}{\frac{l(t)}{2}}$ folgt $l(t) = \dfrac{2x(t)}{\tan a}$ **(2)**

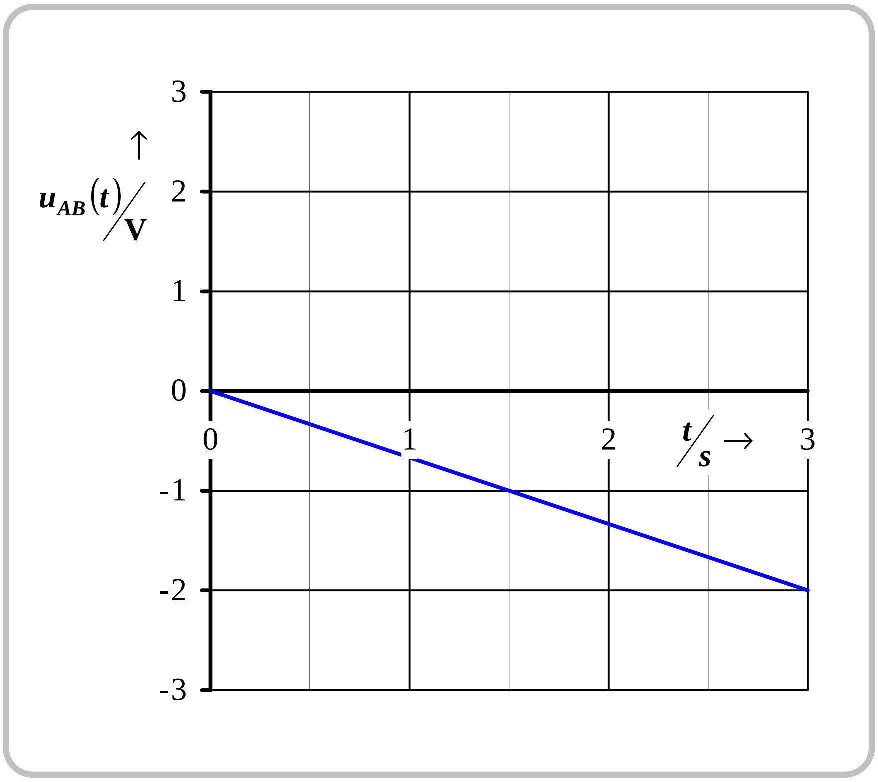
Die Wegzeitfunktion $x(t)$ ergibt sich aus dem Integral $x(t) = \int_0^t v_0 \mathrm{d}t = v_0 t$ **(3)**

(3) in **(2)** eingesetzt liefert mit **(1)** die gesuchte Spannungszeitfunktion

$$\underline{\underline{u_{AB} = -\frac{2B_0 v_0^2 \cdot t}{\tan a}}}$$

2.2 Spannungszeitfunktion $u_{AB}(t)$ für $B_0 = 1\,\mathrm{T}$; $v_0 = 1\,\mathrm{ms}^{-1}$; $a = 71{,}57^{\mathrm{O}}$

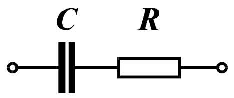
$$u_{AB} = -\frac{2B_0 v_0^2}{\tan a} \cdot t = -\frac{2 \cdot \frac{1\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} \cdot \left(\frac{1\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{3} \cdot t \qquad \underline{\underline{u_{AB} = -0{,}666\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} \cdot t}}$$



3 Wechselstromschaltung

Serienschaltung aus einem Widerstand $\boldsymbol{R}$ und einer Kapazität $\boldsymbol{C}$.

Bei der Frequenz f_1 wird der Scheinwiderstand $|\underline{Z}_1|$ und bei der Frequenz $f_2 = f_1/n$ der Scheinwiderstand $|\underline{Z}_2|$ gemessen.



$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{\mathrm{j}w_1 C}$$

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{\mathrm{j}w_2 C} = R + \frac{n}{\mathrm{j}w_1 C}$$

3.1 Real- und Imaginärteil von $\underline{Z}$ bei f_1 und bei f_2

Gegeben $|\underline{Z}_1|$; $|\underline{Z}_2|$; f_1; n

f_1

Gesucht $\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\} = R$; $\mathrm{Im}\{\underline{Z}_1\} = -\dfrac{1}{w_1 C}$

Lösung Zwei Gleichungen für zwei Unbekannte: R^2 und $\left(\dfrac{1}{w_1 C}\right)^2$

$$|\underline{Z}_1|^2 = R^2 + \frac{1}{(w_1 C)^2}$$

$$|\underline{Z}_2|^2 = R^2 + \frac{n^2}{(w_1 C)^2}$$

Berechnung mittels *Cramerscher Regel*

$$R^2 = \frac{D_R}{D}; \quad \frac{1}{(w_1 C)^2} = \frac{D_C}{D}$$

Wegen der einfacheren Schreibweise werden

R^2 und $\dfrac{1}{(w_1 C)^2}$

als Unbekannte benutzt.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & n^2 \end{vmatrix} = n^2 - 1$$

$$D_R = \begin{vmatrix} |\underline{Z}_1|^2 & 1 \\ |\underline{Z}_2|^2 & n^2 \end{vmatrix} = n^2 |\underline{Z}_1|^2 - |\underline{Z}_2|^2 \quad \rightarrow \quad R^2 = \frac{n^2 |\underline{Z}_1|^2 - |\underline{Z}_2|^2}{n^2 - 1}$$

$$D_C = \begin{vmatrix} 1 & |\underline{Z}_1|^2 \\ 1 & |\underline{Z}_2|^2 \end{vmatrix} = |\underline{Z}_2|^2 - |\underline{Z}_1|^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{(w_1 C)^2} = \frac{|\underline{Z}_2|^2 - |\underline{Z}_1|^2}{n^2 - 1}$$

Ergebnis: $\underline{\underline{\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\} = \sqrt{\dfrac{n^2 |\underline{Z}_1|^2 - |\underline{Z}_2|^2}{n^2 - 1}}}}$ $\quad \underline{\underline{\mathrm{Im}\{\underline{Z}_1\} = -\sqrt{\dfrac{|\underline{Z}_2|^2 - |\underline{Z}_1|^2}{n^2 - 1}}}}$

f_2

Gesucht $\mathbf{Re}\{\underline{Z}_2\} = R\,;\quad \mathbf{Im}\{\underline{Z}_2\} = -\dfrac{n}{w_1 C} = n \cdot \mathbf{Im}\{\underline{Z}_1\}$

Lösung Übernahme der Ergebnisse bei f_1 m.m.

$$\underline{\underline{\mathbf{Re}\{\underline{Z}_2\} = \sqrt{\frac{n^2|\underline{Z}_1|^2 - |\underline{Z}_2|^2}{n^2-1}}}} \qquad = \mathbf{Re}\{\underline{Z}_1\}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{Im}\{\underline{Z}_2\} = -n \cdot \sqrt{\frac{|\underline{Z}_2|^2 - |\underline{Z}_1|^2}{n^2-1}}}} \qquad = n \cdot \mathbf{Im}\{\underline{Z}_1\}$$

3.2 Zahlenwerte für $\mathbf{Re}\{\underline{Z}_{1,2}\}$ und $\mathbf{Im}\{\underline{Z}_{1,2}\}$ in 3.1

Gegeben $n = 2\,;\quad |\underline{Z}_1| = 70\,\mathrm{W}\,;\quad |\underline{Z}_2| = 100\,\mathrm{W}$

Lösung

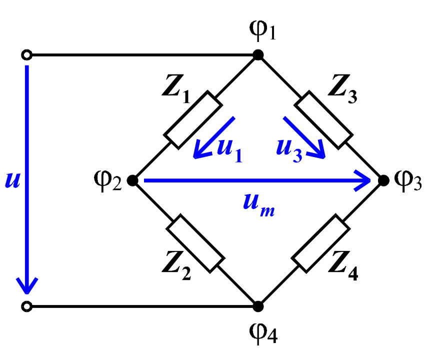
$$\mathbf{Re}\{\underline{Z}_1\} = \mathbf{Re}\{\underline{Z}_2\} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 70^2 - 100^2}{2^2-1}}\,\mathrm{W} \;\underline{\underline{= 56{,}6\,\mathrm{W}}}$$

$$\mathbf{Im}\{\underline{Z}_1\} = -\sqrt{\frac{100^2 - 70^2}{2^2-1}}\,\mathrm{W} \;\underline{\underline{= -41{,}23\,\mathrm{W}}}$$

$$\mathbf{Im}\{\underline{Z}_2\} = 2 \cdot \mathbf{Im}\{\underline{Z}_1\} \underline{\underline{= -82{,}46\,\mathrm{W}}}$$

4 Wechselstrombrücke

4.1 Herleitung der Abgleichbedingung (j_2 - j_3 = 0) für $\underline{Z}_1$ ... $\underline{Z}_4$



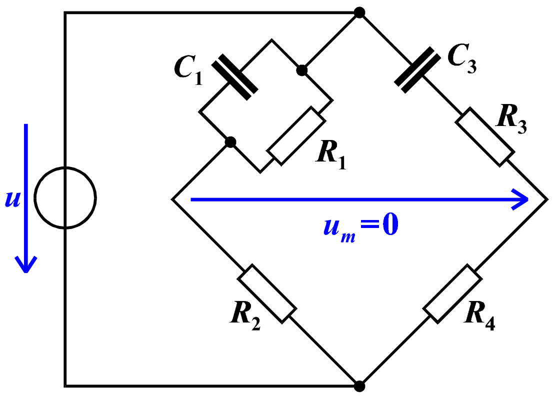
Aus der Forderung j_2 - j_3 = **0** folgt

$$\underline{u}_m = \underline{u}_3 - \underline{u}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{u}_1 = \underline{u}_3$$

$$\overbrace{\underline{u} \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}}^{\underline{u}_1} = \overbrace{\underline{u} \cdot \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}}^{\underline{u}_3} \quad \text{(Spannungsteilerregel)}$$

$$\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3}}}$$

4.2 Komplexe Widerstände aller vier Zweige



$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \mathrm{j}wC_1} = \frac{\frac{1}{R_1} - \mathrm{j}wC_1}{\frac{1}{R_1^2} + (wC_1)^2}$$

$$\underline{Z}_2 = R_2$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + \frac{1}{\mathrm{j}wC_3}$$

$$\underline{Z}_4 = R_4$$

4.3 Berechnung von R_3 und C_3 bei abgeglichener Brücke

Gegeben C_1, R_1, R_2, R_4

Gesucht R_3, C_3

Lösung Aus der Abgleichbedingung folgt $\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_2} \cdot \underline{Z}_1$

Abgleichbedingung

$$R_3 + \frac{1}{\mathrm{j}wC_3} = \frac{R_4}{R_2} \cdot \frac{\frac{1}{R_1} - \mathrm{j}wC_1}{\frac{1}{R_1^2} + (wC_1)^2}$$

Realteilbilanz

$$\underline{\underline{R_3 = \frac{R_4}{R_2} \cdot \frac{R_1}{1 + (wC_1R_1)^2}}} \quad \text{(a)}$$

Imaginärteilbilanz

$$\frac{1}{wC_3} = \frac{R_4}{R_2} \cdot \frac{wC_1R_1^2}{1 + (wC_1R_1)^2}$$

$$\underline{\underline{C_3 = \frac{R_2}{R_4} \cdot \frac{1 + (wC_1R_1)^2}{w^2C_1R_1^2}}} \quad \text{(b)}$$

4.4 Wien-Robinson-Brücke: $\{C_1 = C_3 = C, \quad R_1 = R_3 = R, \quad R_4 = 2R_2\}$

(a) $R = \frac{2R}{1 + (wCR)^2} \quad \rightarrow \quad 1 + (wCR)^2 = 2 \quad \rightarrow \quad w = \frac{1}{CR}$

Frequenzbestimmung Brückenabgleich und $\{\ldots\}$ liefern $\underline{\underline{f = \frac{1}{2\mathrm{p}CR}}}$

(b**)** $C=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left[1+(\omega CR)^2\right]}{\omega^2 CR^2}\;\rightarrow\qquad 2C=\frac{1}{\omega^2 CR^2}+C\qquad\rightarrow\qquad C=\frac{1}{\omega^2 CR^2}$

$$\rightarrow\qquad \omega=\frac{1}{CR}$$

Frequenzbestimmung Brückenabgleich und $\{...\}$ liefern $\underline{\underline{f=\frac{1}{2\pi CR}}}$

wie **(**a**)**