

Lösungsübersicht ET2 S 2009

Die Lösungen sind z.T. ausführlicher kommentiert und diskutiert als es während einer Klausur möglich ist.

1. Elektromagnet [28]

1.1 Zugkraft $F_1 = F_1(b_1, d, I_0, l_L, N, \mu_0)$ in **allgemeiner** Rechnung

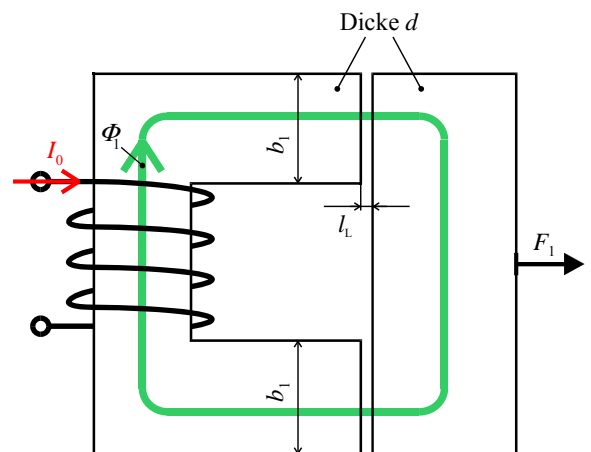
$$F_1 \approx \frac{I_0^2 N^2 \mu_0 b_1 d}{4l_L^2} \quad \text{mit } A_1 = b_1 d \text{ gemäß Gl. (2) von Seite 20 des Skriptes 385}$$

1.2 Zugkraft F_1 für $b_1 = 100 \text{ mm}$

$$F_1 \approx 126 \text{ N}$$

1.3 P_1 in Watt für F_1

$$P_1 = I_0^2 R = I_0^2 \rho \frac{l}{A} = 0,144 \text{ W}$$



1.4 Zugkraft $F_2 = F_2(b_2, d, I_0, l_L, N, \mu_0)$ in **allgemeiner** Rechnung

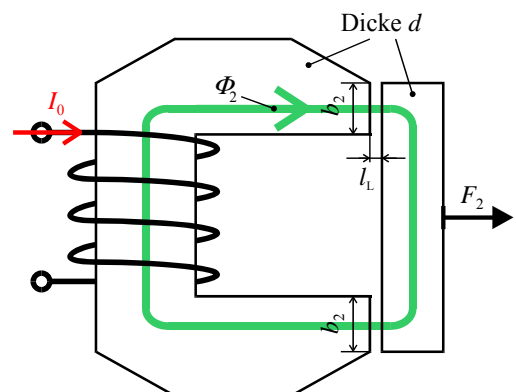
$$F_2 \approx \frac{I_0^2 N^2 \mu_0 b_2 d}{4l_L^2} \quad \text{mit } A_2 = b_2 d \text{ gemäß Gl. (2) von Seite 20 des Skriptes 385}$$

1.5 Zugkraft F_2 für $b_2 = 50 \text{ mm}$

$$F_2 = \frac{F_1}{2} \approx 62,8 \text{ N}$$

1.6 P_2 in Watt für F_2

$$P_2 = P_1 = 0,144 \text{ W}$$



1.7 I_0 für $F_1 = F_2 \Rightarrow I_0 = \sqrt{2} \cdot 2 \text{ A} = \sqrt{8} \text{ A} = 2,83 \text{ A}$

Herleitung zu 1.7

$$F_2 = \frac{I_{02}^2 N^2 \mu_0 b_2 d}{4l_L^2}$$

$$F_1 = \frac{I_{01}^2 N^2 \mu_0 b_1 d}{4l_L^2}$$

$$F_1 = F_2 :$$

$$\frac{I_{02}^2 N^2 \mu_0 b_2 d}{4l_L^2} = \frac{I_{01}^2 N^2 \mu_0 b_1 d}{4l_L^2}$$

$$\frac{I_{02}^2}{I_{01}^2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{mit} \quad \frac{b_1}{b_2} = 2$$

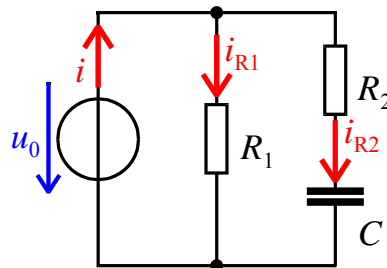
$$I_{02}^2 = \frac{b_1}{b_2} I_{01}^2$$

$$\underline{\underline{I_{02}^2 = 2 \cdot 4 \text{ A}^2 \Rightarrow I_{02} = \sqrt{2} \cdot 2 \text{ A} = \sqrt{8} \text{ A} = 2,83 \text{ A}}}$$

2.

Wirkleistung in einer RC-Schaltung

[36]

Abb. 2.1: Wechselspannungs-
gespeiste RC-Schaltung

Werte für 2.2 + 2.3:

$$\hat{u}_0 = 24 \text{ V}$$

$$R_1 = R_2 = 47 \text{ } \Omega$$

$$f = 72 \text{ Hz}$$

2.1 Wirkleistung P_W , die die Spannungsquelle u_0 an die Schaltung mit R_1 , R_2 , C abgibt

Leistung P_1 im
Widerstand R_1

$$P_1 = \frac{\tilde{u}_0^2}{R_1} = \frac{\hat{u}_0^2}{2R_1}$$

Wirkleistung P_2 in der
 CR_2 -Reihenschaltung

$$P_2 = \tilde{i}_{R2}^2 R_2 = \frac{\hat{i}_{R2}^2}{2} R_2$$

$$\tilde{i}_{R2} = \frac{u_0}{Z} = \frac{u_0}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \quad \hat{i}_{R2} = \frac{\hat{u}_0}{\left| R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right|} = \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Gesamte Wirkleistung $P_W = P_1 + P_2$

$$P_W = \frac{\hat{u}_0^2}{2R_1} + \frac{\hat{i}_{R2}^2}{2} R_2 = \frac{\hat{u}_0^2}{2R_1} + \frac{\hat{u}_0^2 R_2}{2 \left[R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]}$$

Nach Ausklammern, Erweiterung mit $(\omega C)^2$ und mit Hauptnenner:

$$P_W = \frac{\hat{u}_0^2}{2R_1} \left\{ 1 + \frac{(\omega C)^2 R_1 R_2}{\left[1 + (\omega C R_2)^2 \right]} \right\} = \frac{\hat{u}_0^2}{2R_1} \left[\frac{1 + 2(\omega C R_2)^2 \frac{R_1}{R_2}}{1 + (\omega C R_2)^2} \right]$$

2.2 Wirkleistung P_W für $\hat{u}_0 = 24 \text{ V}$, $R = R_1 = R_2 = 47 \text{ } \Omega$, $f = 72 \text{ Hz}$

$$P_W = \frac{\hat{u}_0^2}{2R_1} \left[\frac{1 + 2(\omega CR_2)^2 \frac{R_1}{R_2}}{1 + (\omega CR_2)^2} \right] \rightarrow P_W = \frac{\hat{u}_0^2}{2R} \left[\frac{1 + 2(\omega CR)^2}{1 + (\omega CR)^2} \right]$$

$$\omega CR = 0,9993 \approx 1,00 \quad \Rightarrow \quad P_W = \frac{\hat{u}_0^2}{2R} \cdot 1,5 = 9,19 \text{ W}$$

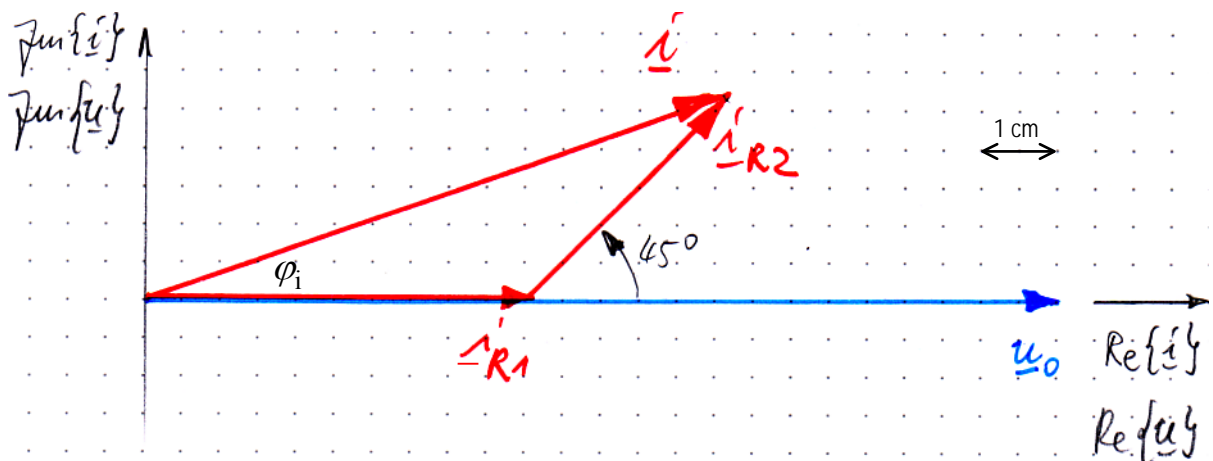
Die Spannungsquelle u_0 gibt die Wirkleistung $P_W = 9,19 \text{ W}$ ab. Diese Wirkleistung wird in den Widerständen R_1 und R_2 in Wärmeleistung umgesetzt.

2.3 Zeigerbild für u_0 und i ($1 \text{ V} \hat{=} 0,5 \text{ cm}$, $100 \text{ mA} \hat{=} 1 \text{ cm}$)

$$\hat{i}_{R1} = \frac{\hat{u}_0}{R_1} = \frac{24 \text{ V}}{47 \text{ } \Omega} = 0,511 \text{ A}, \quad \hat{i}_{R2} = \frac{\hat{u}_0}{R_2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR_2} \right)^2}} = \frac{24 \text{ V}}{47\sqrt{2} \text{ } \Omega} = 0,361 \text{ A}$$

$$\omega CR_2 = 1,00 \Rightarrow \varphi_{iR2} = 45^\circ: \underline{i}_{R2} \text{ eilt } \underline{u}_0 \text{ um } \varphi_{iR2} = 45^\circ \text{ voraus.}$$

Konstruktion	[1] \underline{u}_0	[3] \underline{i}_{R2} 45° vor \underline{u}_0	Betrag $ \underline{i} = \hat{i} = 0,8 \text{ A}$
	[2] $\underline{i}_{R1} \parallel \underline{u}_0$	[4] $\underline{i} = \underline{i}_{R1} + \underline{i}_{R2}$	Phase $\varphi_1 = 18^\circ$



Alternativer Rechenweg für 2.1

Die Berechnung der von der Spannungsquelle u_0 abgegebenen Wirkleistung P_W kann natürlich auch mit der Gleichung

$$P_W = \tilde{u}_0 \tilde{i} \cos \varphi_Z$$



erfolgen. Dieser Weg ist jedoch sehr aufwändig, da der Effektivwert des Stromes \tilde{i} und der Leistungsfaktor $\cos \varphi_Z$ zu berechnen sind. Man überzeuge sich vom hohen Aufwand, der mit der Berechnung nach $P_W = \tilde{u}_0 \tilde{i} \cos \varphi_Z$ verbunden ist:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{i}} &= \frac{\underline{u}_0}{\underline{Z}} = \frac{\underline{u}_0}{R_1 \left\| \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) \right\|} = \frac{\underline{u}_0 \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R_1 \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)} = \frac{\underline{u}_0 R_2 \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 + \frac{1}{j\omega C R_2} \right)}{R_1 R_2 \left(1 + \frac{1}{j\omega C R_2} \right)} \\ \underline{\tilde{i}} &= \frac{\underline{u}_0}{R_1} \cdot \frac{\frac{R_1}{R_2} + 1 + \frac{1}{j\omega C R_2}}{1 + \frac{1}{j\omega C R_2}} = \frac{\underline{u}_0}{R_1} \cdot \frac{1 + j\omega C R_2 \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right)}{1 + j\omega C R_2} \end{aligned}$$

Effektivwert des Stromes \tilde{i}

$$\tilde{i} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = \frac{|\underline{\tilde{i}}|}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{|\underline{\tilde{i}}|}{\sqrt{2}} = \frac{|\underline{u}_0|}{\sqrt{2} R_1} \cdot \frac{\left| 1 + j\omega C R_2 \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) \right|}{|1 + j\omega C R_2|} = \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{2} R_1} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left[\omega C R_2 \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) \right]^2}}{\sqrt{1 + (\omega C R_2)^2}}$$

Mit $\hat{u}_0 = 24 \text{ V}$, $R = R_1 = R_2 = 47 \text{ } \Omega$, $f = 72 \text{ Hz}$ wird $\omega C R_2 = 1,00$ und damit:

$$\tilde{i} = \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{2} R_1} \cdot \frac{\sqrt{1+4}}{\sqrt{1+1}} = \frac{\hat{u}_0 \sqrt{5}}{2 R_1} = 0,5709 \text{ A}$$

Leistungsfaktor $\cos \varphi_Z$

$$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i \qquad \varphi_Z = -\varphi_i$$

Voraussetzungsgemäß gilt $\varphi_u = 0$ (Sinusförmiger Spannungszeitverlauf wird o. B. d. A. mit $\varphi_u = 0$ angenommen).

$$\varphi_i = \varphi_{\text{Zähler}} - \varphi_{\text{Nenner}}$$

$$\varphi_i = \arctan \left[\overbrace{\omega C R_2 \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right)}^2 \right] - \arctan \left(\overbrace{\omega C R_2}^1 \right) = 0,3218 \hat{=} 18,43^\circ$$

Zeiger des Gesamtstromes \underline{i} eilt dem Spannungszeiger \underline{u}_0 um $\varphi_i = 18,43^\circ$ voraus.

Wirkleistung P_W

$$P_W = \tilde{u}_0 \tilde{i} \cos \varphi_Z = 16,97 \text{ V} \cdot 0,5709 \text{ A} \cdot \cos(0,3218)$$

$$P_W = 9,19 \text{ W}$$

3. RL-Schaltung bei DC und AC

[36]

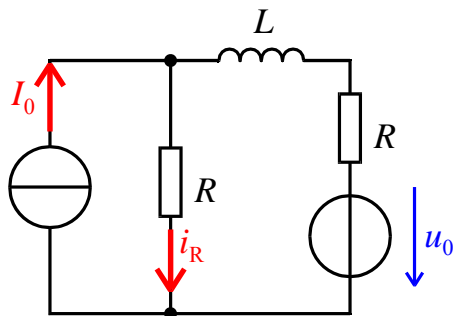


Abb. 3.1: RL-Schaltung

3.1 **Allgemeiner** analytischer Ausdruck für die sinusförmige Zeitfunktion $u_0(t)$

$$u_0(t) = \hat{u}_0 \sin(\omega t + \varphi_u)$$

3.2 **Wertmäßiger** analytischer Ausdruck für die sinusförmige Zeitfunktion $u_0(t)$

$$\hat{u}_0 = |2 \text{ V} - j 1,5 \text{ V}| = \sqrt{2^2 + 1,5^2} \text{ V} = 2,50 \text{ V}$$

$$f = 50 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi f = 314 \text{ s}^{-1}$$

$$\varphi_u = \arctan\left(\frac{-1,5}{2}\right) = -0,6435 \text{ rad} \quad \varphi_u = -35,87 \text{ Grad}$$

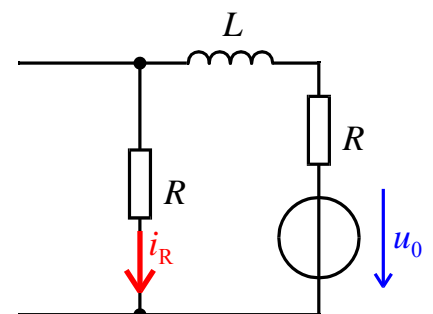
$$u_0(t) = 2,5 \text{ V} \cdot \sin(314 \text{ s}^{-1} \cdot t - 0,6435)$$

3.3 Komplexe Amplitude des Stromes \underline{i}_R **allgemein**

$$\underline{i}_R = \frac{\underline{u}_0}{2R + j\omega L}$$

3.4 Komplexe Amplitude des Stromes \underline{i}_R **wertmäßig**

$$\underline{i}_R = \frac{(2 - j 1,5) \text{ V}}{2R + j\omega L}$$



Wechselstromersatzschaltung

Mit $2R = 42 \Omega$ und $\omega L = 62,83 \Omega$ wird

$$\underline{i}_R = \frac{2 - j 1,5}{42 + j 62,83} \cdot \frac{V}{\Omega} \quad \text{und} \quad \frac{V}{\Omega} = A \quad \text{ergibt sich}$$

$$\underline{i}_R = \overbrace{\left| \frac{2 - j 1,5}{42 + j 62,83} \right|}^{\hat{i}_R} A \cdot e^{j\varphi} \quad \hat{i}_R = \left| \frac{2 - j 1,5}{42 + j 62,83} \right| A = \frac{\sqrt{2^2 + 1,5^2}}{\sqrt{42^2 + 62,83^2}} A = 0,03308 A$$

$$\varphi = \varphi_{\text{Zähler}} - \varphi_{\text{Nenner}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{-1,5}{2} - \arctan \frac{62,83}{42} = -1,625$$

$$\varphi = -93,11^\circ$$

Exponentialform:

$$\underline{i}_R = 33,1 \text{ mA} \cdot e^{-j1,63} \Rightarrow$$

Trigonometrische Form:

$$\underline{i}_R = 33,1 \text{ mA} \cdot [\cos(1,63) + j \sin(-1,63)]$$

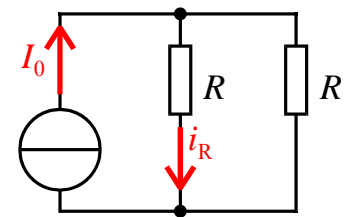
Kartesische Form:

$$\Rightarrow \underline{i}_R = -1,80 \text{ mA} - j 33,0 \text{ mA}$$

3.5 Wertmäßiger analytischen Ausdruck für die Stromzeitfunktion $i_R(t)$

$$i_R(t) = \frac{I_0}{2} + \hat{i}_R \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i_R(t) = 10 \text{ mA} + 33,1 \text{ mA} \cdot \sin(314 \text{ s}^{-1} \cdot t - 1,63)$$



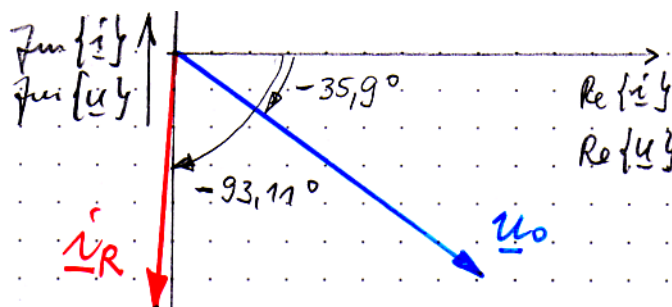
Gleichstromersatzschaltung

Zugabe

Quantitatives
Zeigerbild \underline{i}_R , \underline{u}_0

$$1 \text{ V} \hat{=} 2 \text{ cm}$$

$$1 \text{ mA} \hat{=} 1 \text{ mm}$$



3.6 Kurvenverläufe $u_0(t)$ und $i_R(t)$

$$u_0(t) = 2,5 \text{ V} \cdot \sin(314 \text{ s}^{-1} \cdot t - 0,6435) \quad \text{nach 3.2}$$

$$i_R(t) = 10 \text{ mA} + 33,1 \text{ mA} \cdot \sin(314 \text{ s}^{-1} \cdot t - 1,63) \quad \text{nach 3.5}$$

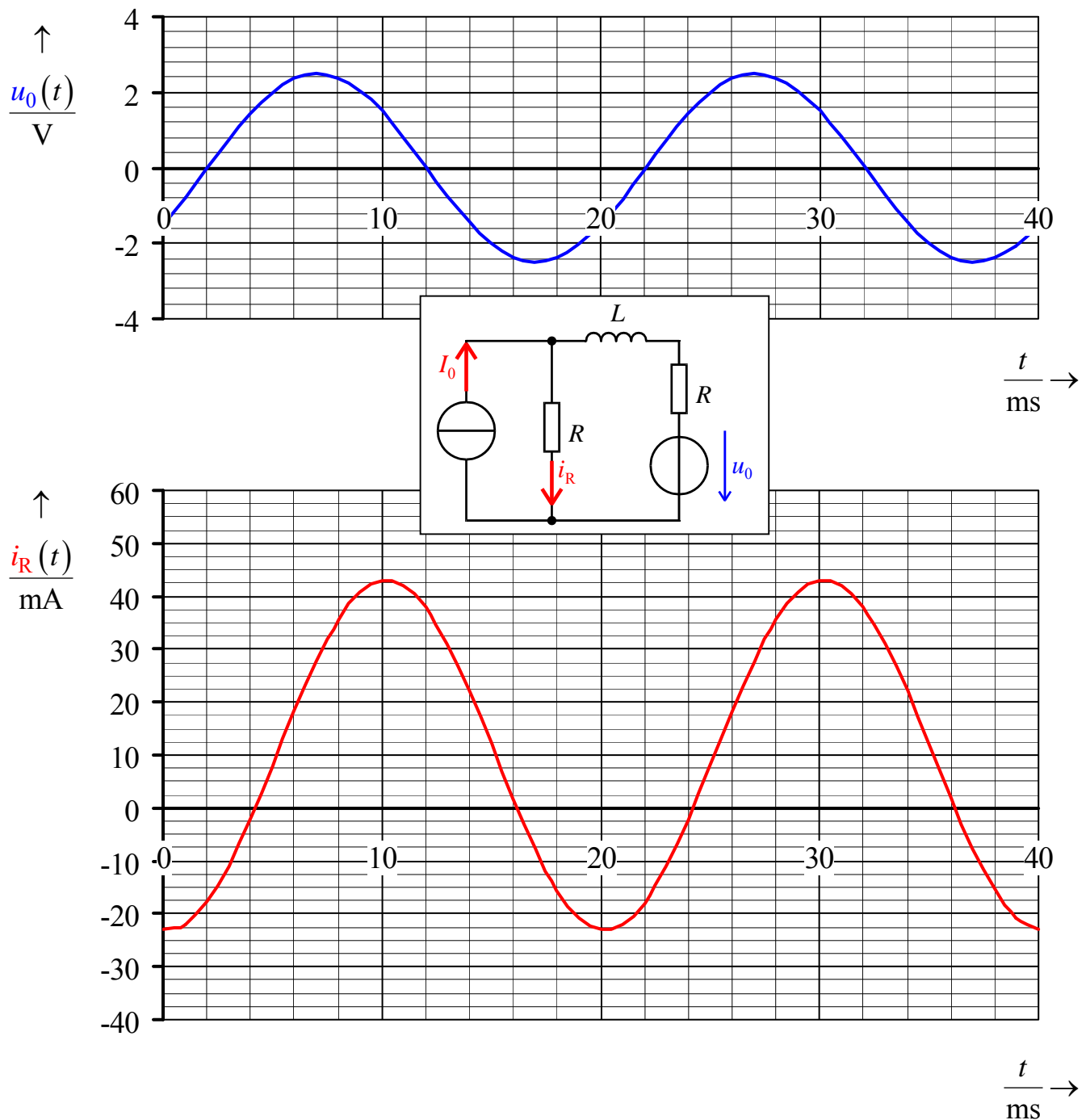


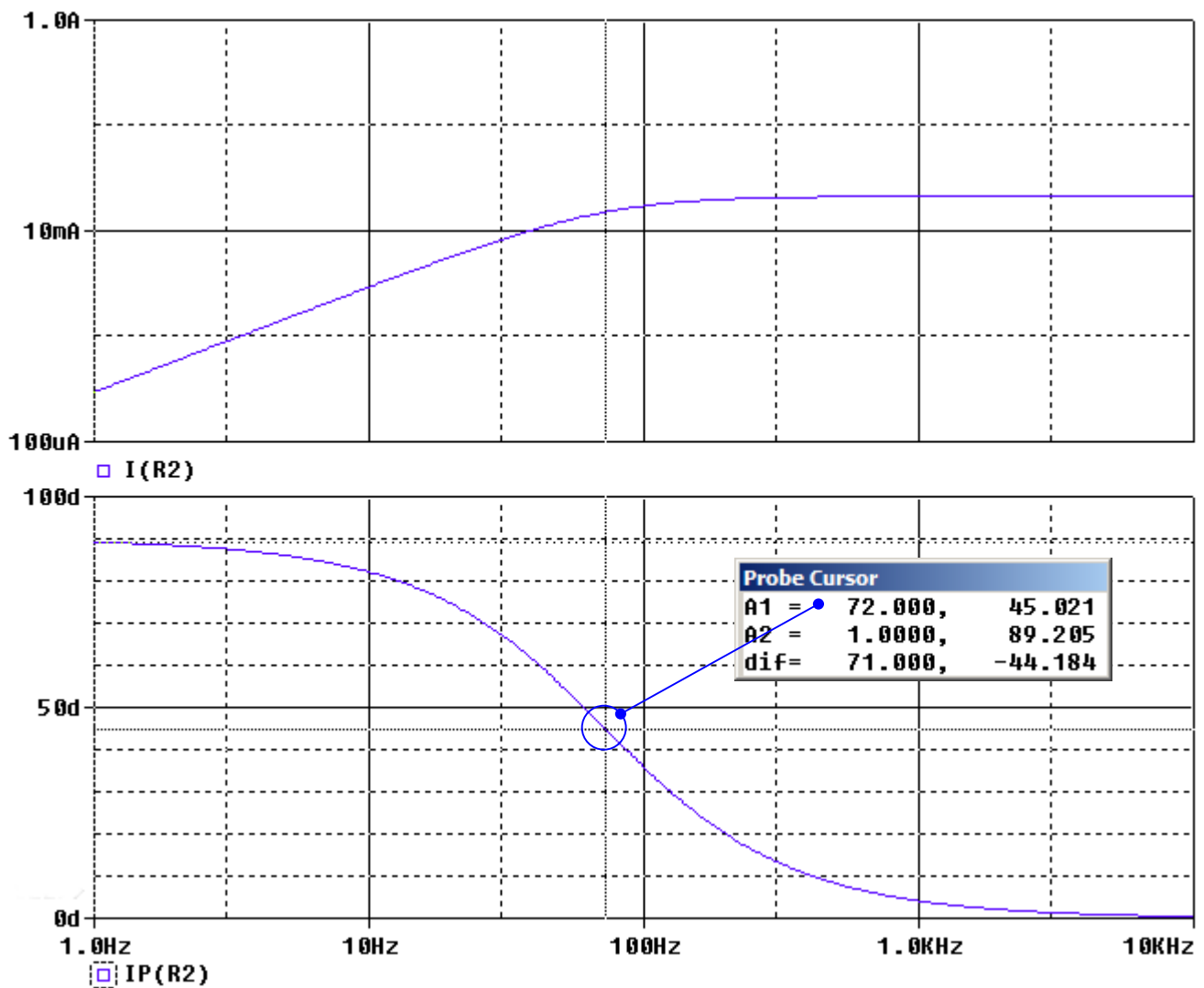
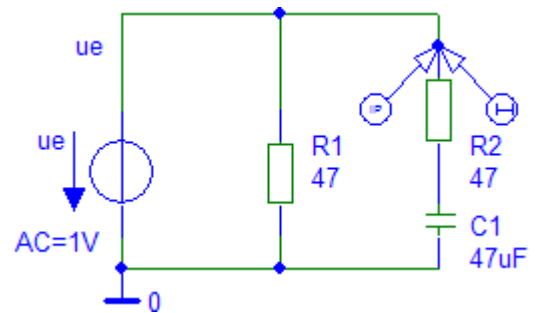
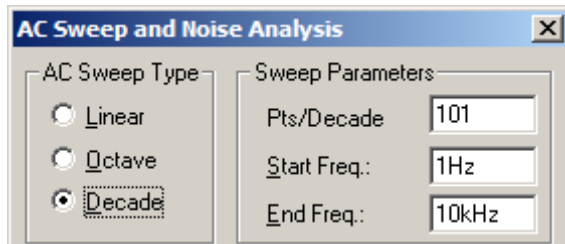
Abb. 3.2: Kurvenverläufe $u_0(t)$ (oben) und $i_R(t)$ (unten)



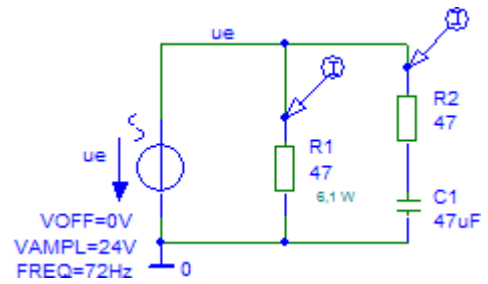
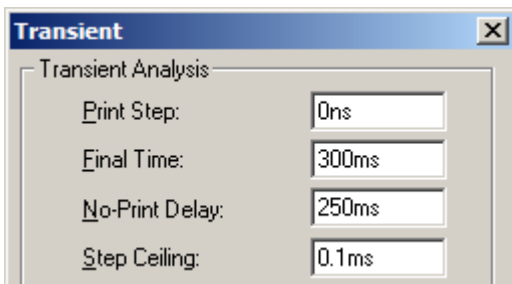
Aufgabe 2: Wirkleistung in einer RC-Schaltung

Schaltungssimulation mit PSpice Studentenversion 9.1

1. Vorklärung BODE-Diagramm für i_{R2}

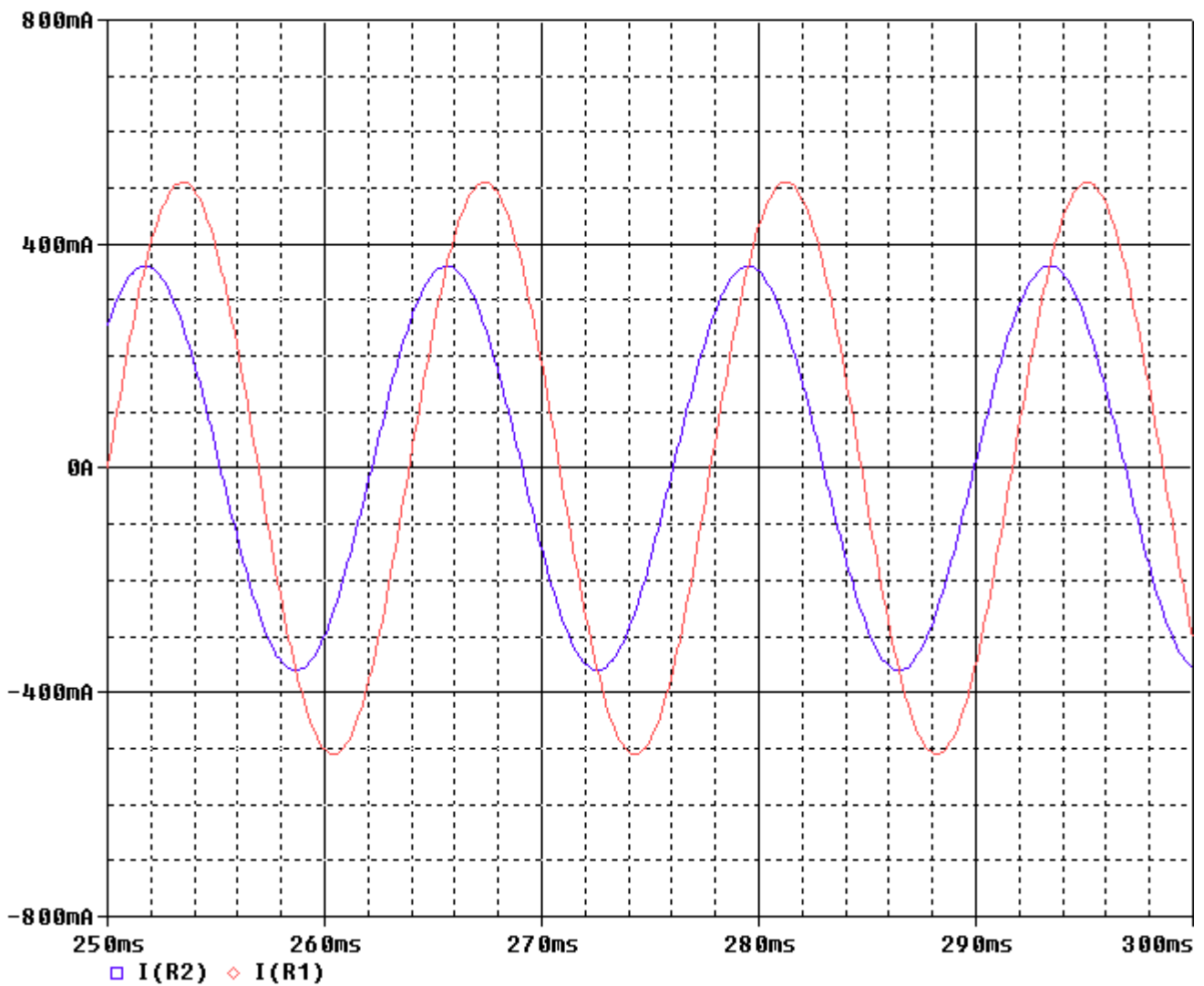


2. Grundsätzlicher Zeitverlauf

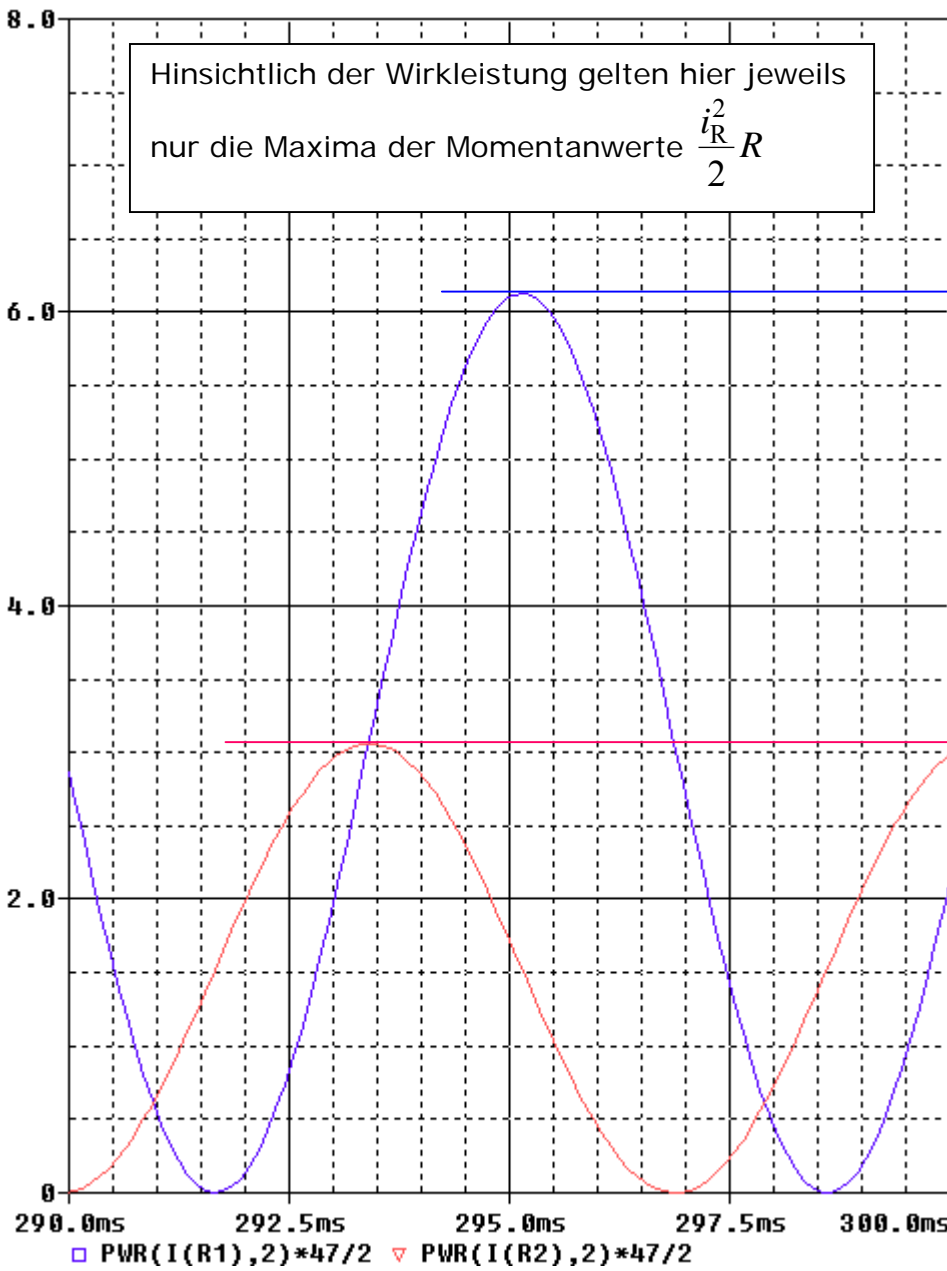
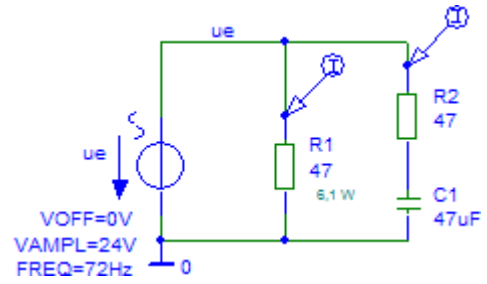
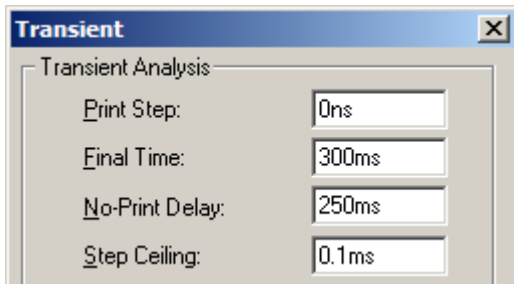


$$\rightarrow i_{R1}(t) \sim u_0(t)$$

→ Stromzeiger von $i_{R2}(t)$ um 45 Grad vor Spannungszeiger von $u_0(t)$



3. Wirkleistungsbetrachtung



$$\frac{i_{R1}^2}{2} R_2 = 6,13 \text{ W}$$

$$\frac{i_{R2}^2}{2} R_2 = 3,06 \text{ W}$$

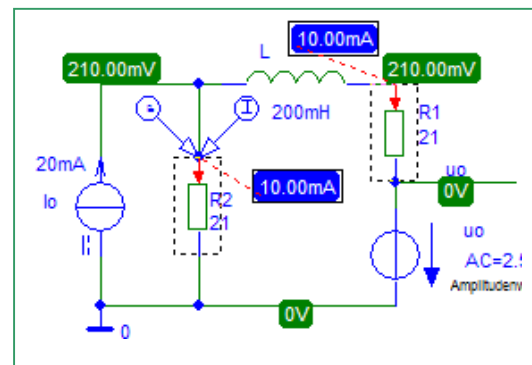
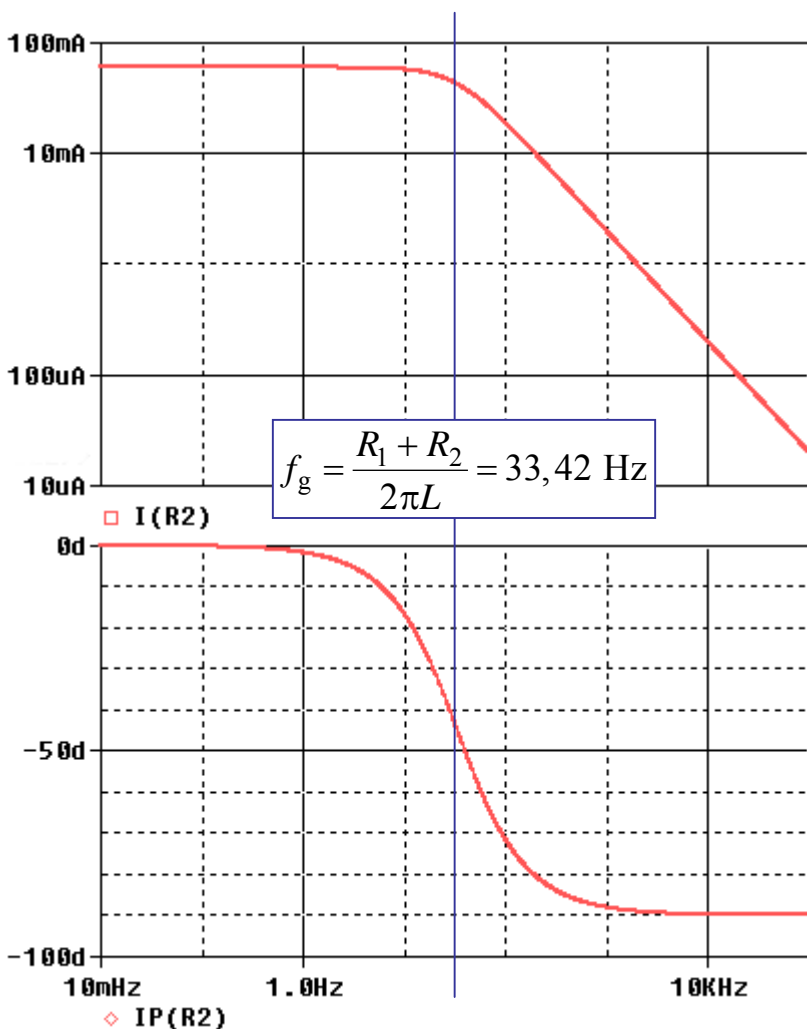
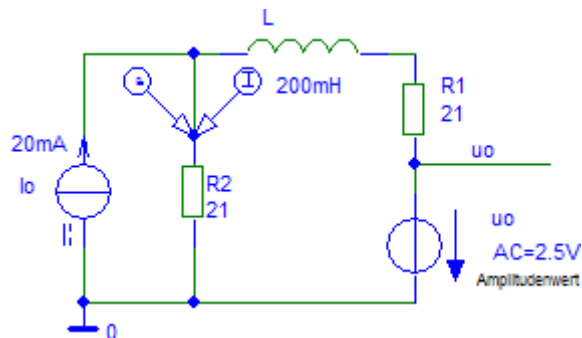
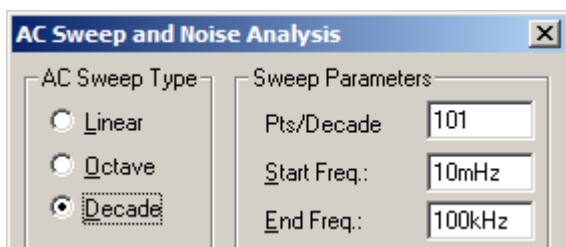
$$\text{Summe} = 9,19 \text{ W}$$



Aufgabe 3: RL-Schaltung bei DC und AC

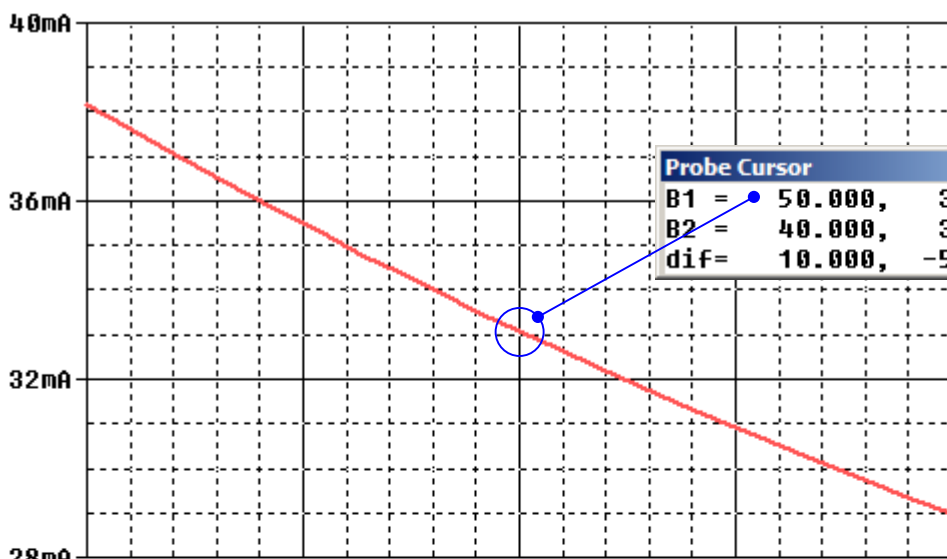
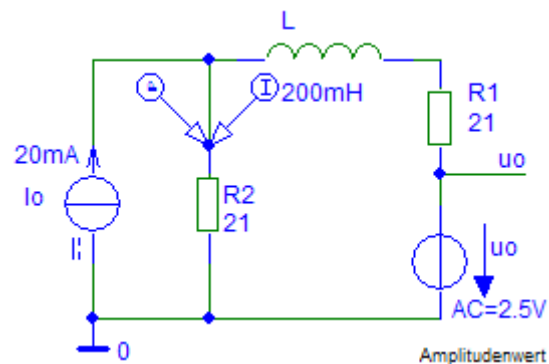
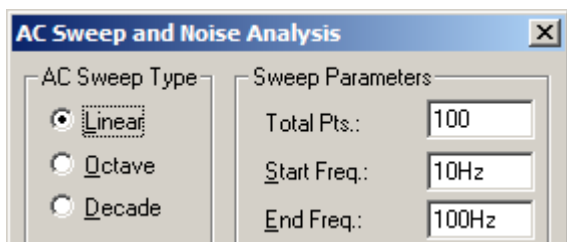
Schaltungssimulation mit PSpice Studentenversion 9.1

1. Vorklärung BODE-Digramm für i_{R2}



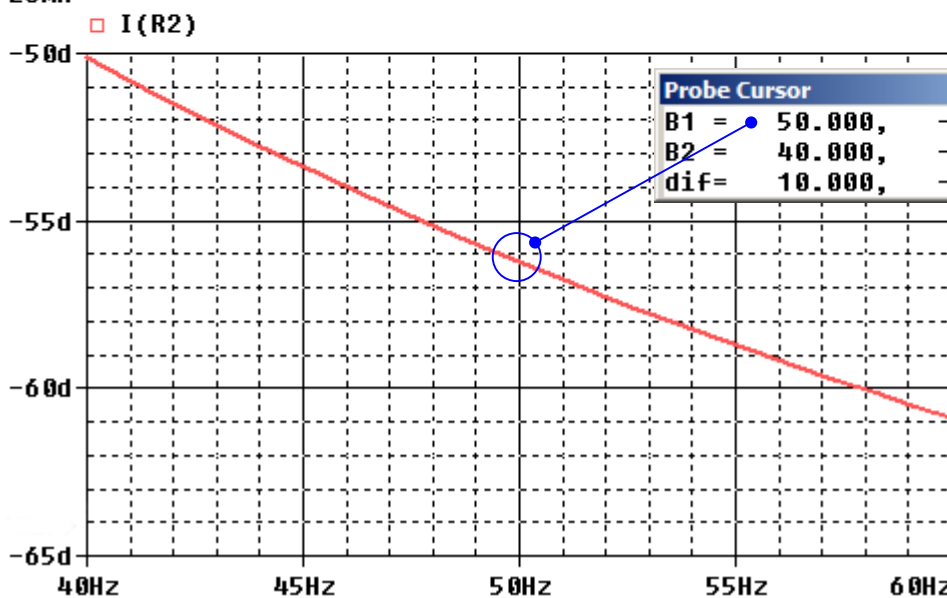
Fazit Bei Spannungspeisung mit u_0 weist i_R Tiefpassverhalten 1. Ordnung auf (f_g)

2. Messung von Amplitude und Phase von i_R



Probe Cursor			
B1 =	50.000,	33.079m	
B2 =	40.000,	38.166m	
dif=	10.000,	-5.0873m	

$$\hat{i}_R = 33,1 \text{ mA}$$



Probe Cursor			
B1 =	50.000,	-56.239	
B2 =	40.000,	-50.119	
dif=	10.000,	-6.1201	

$$\varphi_{iR} - \varphi_u = -56,2^\circ$$

Der Zeiger u_0 eilt dem Zeiger i_R um $56,2^\circ$ voraus.

3. Kurvenverläufe $u_0(t)$ und $i_R(t)$

