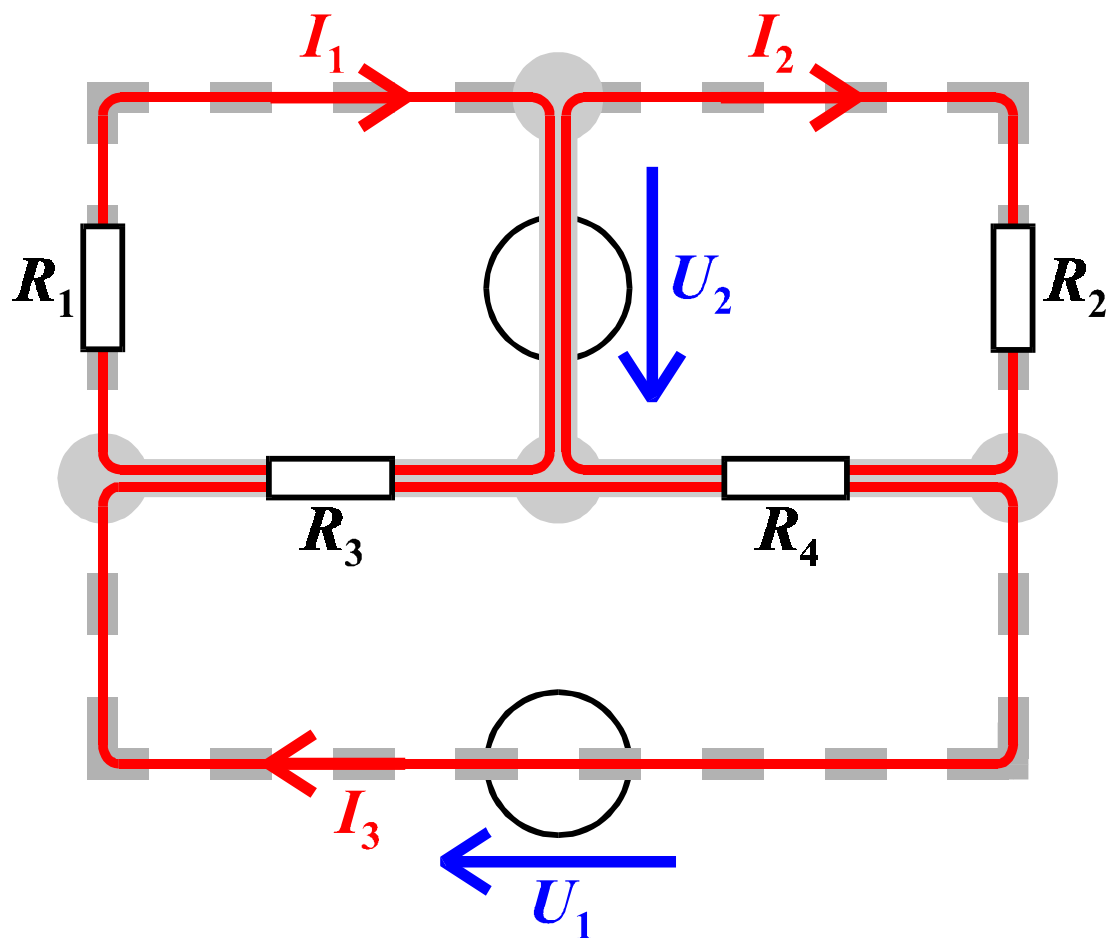

Maschenstromanalyse mit Widerstandsmatrix

Beispiel aus der Vorlesung Elektrotechnik 1



Vollständiger Baum →

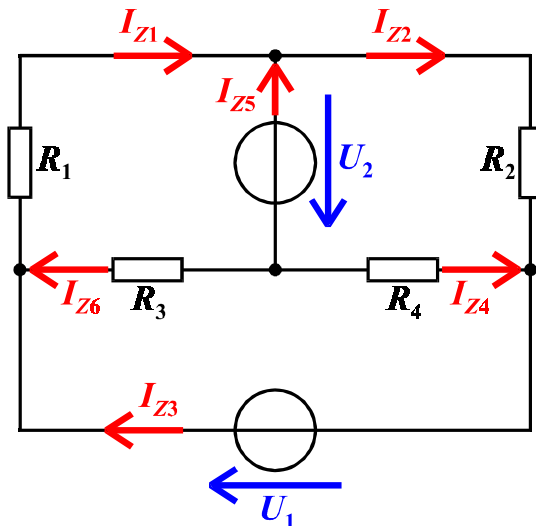
Baumkomplement →

Prof. Dr.-Ing. H.-J. Hage
WS 1999/2000

Beispiel zur Maschenstromanalyse

Mesh Analysis

Gegeben



Gesucht

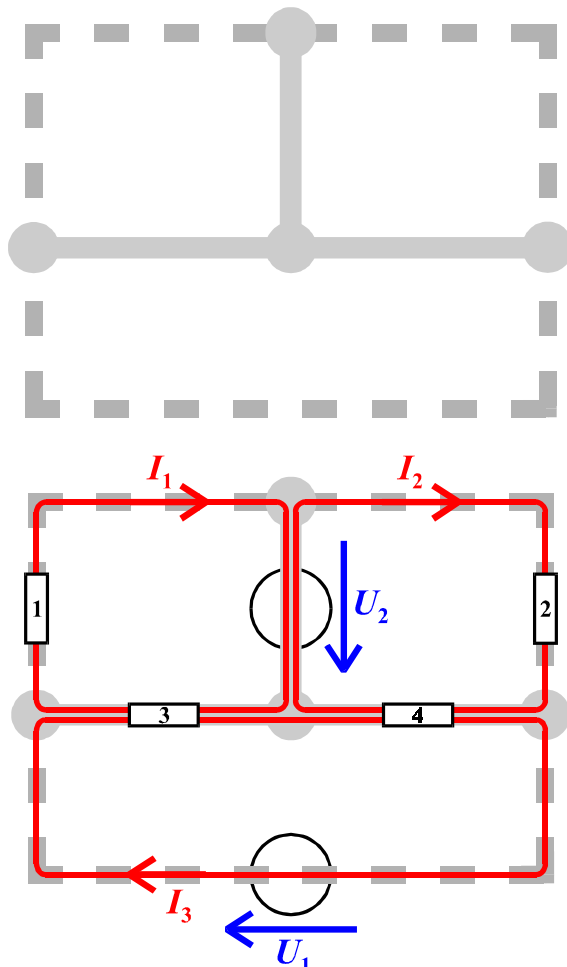
Sämtliche Zweigströme I_{Zz} für die Bauelemente-Werte

$$R_1 = 20 \, \Omega \quad R_2 = 5 \, \Omega$$

$$R_3 = 5 \, \Omega \quad R_4 = 20 \, \Omega$$

$$U_1 = 80 \, \text{V} \quad U_2 = 40 \, \text{V}$$

Lösung



- [1]** Streckenkomplex (Graph) der Schaltung liefert
 vollst. Baum und
 Baumkomplement.

- [2]** Jeder der **3** Zweige des Baumkomplements wird zum Ausgangspunkt *eines* Maschenstromes I_i genommen.

Jeder dieser Maschenströme I_i muss über einen oder mehrere Zweige des vollständigen Baumes einen geschlossenen Weg nehmen (von **3** Zweigen des *Baumkomplements* gehen genau **3** Maschenströme aus).

Die *Richtung* der Maschenströme ist *beliebig wählbar*.

[3] Aufstellen der Matrixgleichung für die Maschenströme I_i

$$(R_{ij}) \cdot (I_i) = (U_{qi})$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_3 & 0 & -R_3 \\ 0 & R_2 + R_4 & -R_4 \\ -R_3 & -R_4 & R_3 + R_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_2 \\ U_2 \\ -U_1 \end{pmatrix}$$

Aufstellen der Maschenwiderstandsmatrix (R_{ij})

- $R_{ii} \rightarrow$ Auf einem Platz i , i der Hauptdiagonalen steht die Summe der in der Masche i vorhandenen Widerstände (= Ringwiderstand).
- $R_{ij} \rightarrow$ Auf den Nebendiagonalplätzen i, j ($i \neq j$) stehen die Koppelwiderstände. Das **Vorzeichen ist negativ**, wenn die **Maschenströme in entgegengesetzter Richtung** durch die Koppelwiderstände fließen. **Das Vorzeichen ist positiv**, wenn die Maschenströme **in gleicher Richtung** durch die Koppelwiderstände fließen.

Aufstellen des Spaltenvektors der *ungesteuerten* Spannungsquellen (U_{qi})

- $U_{qi} \rightarrow$ Auf dem Platz i steht die Summe der Quellenspannungen der Masche i . Das Vorzeichen einer Quellenspannung ist *positiv*, wenn ihr Spannungspfeil der Maschenstromrichtung *entgegen* gerichtet ist. Das Vorzeichen einer Quellenspannung ist *negativ*, wenn der Quellenspannungspfeil mit der Maschenstromrichtung *übereinstimmt*.

[4] Berechnung der Maschenströme I_i

$$(I_i) = (R_{ij})^{-1} \cdot (U_{qi})$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & 0 & -R_3 \\ 0 & R_2 + R_4 & -R_4 \\ -R_3 & -R_4 & R_3 + R_4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -U_2 \\ U_2 \\ -U_1 \end{pmatrix}$$

Nach dem Einsetzen der Widerstandswerte, der Ausführung der Matrizeninversion, dem Einsetzen der Quellspannungswerte und nachfolgender Ausführung der Matrizenmultiplikation erhält man die Maschenströme:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & -5 \\ 0 & 25 & -20 \\ -5 & -20 & 25 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 40 \\ -80 \end{pmatrix} \cdot \text{A} \quad \text{Ergebnis:} \quad \underline{\underline{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \text{A}}}$$

[5] Berechnung der z Zweigströme I_{Zz}

$$I_{Z1} = I_1 \qquad I_{Z1} = -3 \text{ A}$$

$$I_{Z2} = I_2 \qquad I_{Z2} = -4 \text{ A}$$

$$I_{Z3} = I_3 \qquad I_{Z3} = -7 \text{ A}$$

$$I_{Z4} = I_3 - I_2 \qquad I_{Z4} = -3 \text{ A}$$

$$I_{Z5} = I_2 - I_1 \qquad I_{Z5} = -1 \text{ A}$$

$$I_{Z6} = I_1 - I_3 \qquad I_{Z6} = 4 \text{ A}$$

Berechnungsbeispiel für MS-EXCEL

Zur Berechnung der Maschenströme benötigt man die Matrizenoperationen *Inversion* und *Multiplikation*, für die MS-EXCEL folgende Befehle bereitstellt:

- Inversion einer Matrix \rightarrow INDEX(MINV(Matrix;Zeile;Spalte))
- Matrizenmultiplikation \rightarrow MMULT(Matrix1;Matrix2)

1. Eingabe der Elemente Widerstandsmatrix in die Zeilen und Spalten (hier: R_{11} in B2 usw. bis R_{22} in D4) einer EXCEL-Tabelle.

	A	B	C	D	E
1					
2		25	0	-5	
3	$R_{ij} =$	0	25	-20	Ω
4		-5	-20	25	
5					

2. Eingabe der Befehle INDEX(MINV(Matrix;Zeile;Spalte)) zur Matrizeninversion

	A	B	C	D	E
1					
2		25	0	-5	Ω
3	R_{ij}	0	25	-20	
4		-5	-20	25	
5					
6		=INDEX(MINV(\$B\$2:\$D\$4);1;1)	=INDEX(MINV(\$B\$2:\$D\$4);1;2)	=INDEX(MINV(\$B\$2:\$D\$4);1;3)	S
7	R_{ij}^{-1}	=INDEX(MINV(\$B\$2:\$D\$4);2;1)	=INDEX(MINV(\$B\$2:\$D\$4);2;2)	=INDEX(MINV(\$B\$2:\$D\$4);2;3)	
8		=INDEX(MINV(\$B\$2:\$D\$4);3;1)	=INDEX(MINV(\$B\$2:\$D\$4);3;2)	=INDEX(MINV(\$B\$2:\$D\$4);3;3)	
9					

Ergebnis der Matrizeninversion →

5					
6		0,045	0,02	0,025	S
7	R_{ij}^{-1}	0,02	0,12	0,1	
8		0,025	0,1	0,125	
9					

3. Eingabe der Spannungsquellen U_{qi} (Elemente des Spaltenvektors) und Eingabe der Befehle MMULT(Matrix1;Matrix2) zur Matrizenmultiplikation

	F	G	H
1			
2		-40	V
3	U_{qi}	40	
4		-80	
5			
6		=INDEX(MMULT(\$B\$6:\$D\$8;\$G\$2:\$G\$4);1)	A
7	I_i	=INDEX(MMULT(\$B\$6:\$D\$8;\$G\$2:\$G\$4);2)	
8		=INDEX(MMULT(\$B\$6:\$D\$8;\$G\$2:\$G\$4);3)	
9			

Ergebnis:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		25	0	-5			-40	
3	$R_{ij} =$	0	25	-20	Ω		40	V
4		-5	-20	25			-80	
5								
6		0,045	0,02	0,025			-3	
7	$R_{ij}^{-1} =$	0,02	0,12	0,1	S		-4	A
8		0,025	0,1	0,125			-7	
9								

Literaturhinweise

- Maschenstromanalyse

Paul, Reinhold:

Elektrotechnik: Grundlagenlehrbuch Band 2: Netzwerke
 Berlin [usw.]: Springer 1990

Paul, Reinhold und Paul, Steffen:

Arbeitsbuch zu Elektrotechnik 2
 Berlin [usw.]: Springer 1996

Paul, Reinhold und Paul, Steffen:

Repetitorium Elektrotechnik
 Berlin [usw.]: Springer 1996

- Matrizenalgebra

Böhme, Gert:

Anwendungsorientierte Mathematik
 Berlin [usw.]: Springer 1987