Lösungsübersicht ET1 W 2008/9

Die Lösungen sind z.T. ausführlicher kommentiert und diskutiert als es während einer Klausur möglich ist.

Kurzfassung

1.1 $I_6 = \dfrac{U_{01} - U_{02} + I_0 (R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7}$

1.2 $U_6 = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{V}$

1.3 $P_6 = \dfrac{1}{54}\,\mathrm{W}$

1.4 $R_6 = 21\ \Omega$

1.5 $P_{6\,\max} = 26{,}8\ \mathrm{mW}$

2.1 $R \approx 6{,}74\ \Omega$

2.2 $I \approx 5{,}93\ \mathrm{A}$

3.1 $R_\mathrm{I} = 1\ \Omega$

3.3 $R_\mathrm{P} = \dfrac{1}{19}\,\Omega$

4.1 $\alpha_{20} = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$

4.2 $R_{35} = 106\ \Omega$

4.3 $\alpha_{20\ \mathrm{ers}} = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1} \qquad ((\approx 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1} \ldots \approx 1{,}4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}))$

4.4 $R_{35\ \mathrm{ers}} \approx 34\ \Omega$

1 Aktiver und passiver Zweipol [26]

Gegeben Netzwerk mit I_0, U_{01}, U_{02}, $R_n = n\ \Omega$, $U_{01} = 1\ \text{V}$, $U_{02} = 2\ \text{V}$, $I_0 = 0{,}5\ \text{A}$.

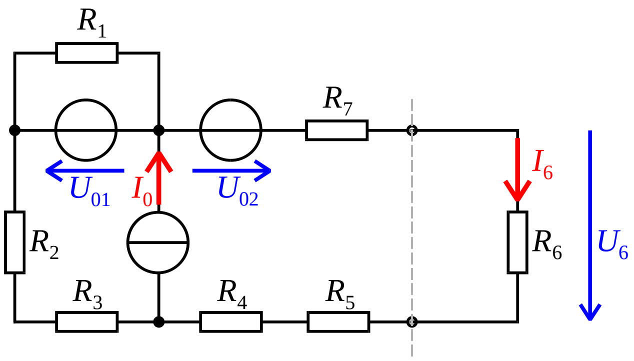
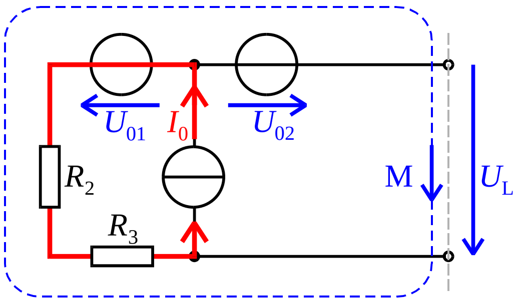


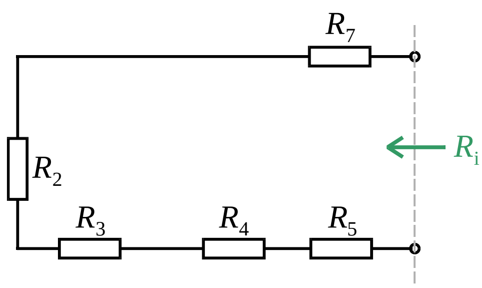
Abb. 1: Netzwerk mit drei Quellen

Vorab werden die Leerlaufspannung U_L und der Innenwiderstand R_i berechnet. R_1 beeinflusst U_L, R_i wegen der Spannungsspeisung mit U_{01} nicht:



M $$U_\text{L} - I_0\left(R_2 + R_3\right) - U_{01} + U_{02} = 0$$

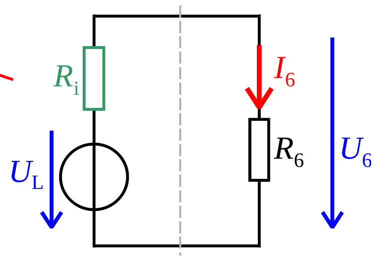
$$U_\text{L} = U_{01} - U_{02} + I_0\left(R_2 + R_3\right) = 1{,}5\ \text{V}$$



$$R_\text{i} = R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_7 = 21\ \Omega$$

1.1 I_6 als Funktion von R_n, U_{01}, U_{02} und I_0

$$I_6 = \frac{U_\text{L}}{R_\text{i} + R_6} = \frac{U_{01} - U_{02} + I_0\left(R_2 + R_3\right)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7}$$



1.2 U_6 in Volt

$$I_6 = \frac{-1\ \text{V} + 0{,}5\ \text{A} \cdot 5\ \text{V/A}}{27\ \text{V/A}} = \frac{1}{18}\text{A}$$

$$U_6 = I_6 R_6 = \frac{1}{18}\text{A} \cdot 6\frac{\text{V}}{\text{A}} = \frac{1}{3}\text{V}$$

1.3 In R_6 umgesetzte Leistung P_6

$$P_6 = I_6 U_6 = \frac{1}{18}\,\mathrm{A} \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{V} = \frac{1}{54}\,\mathrm{W} \approx 18{,}5\ \mathrm{mW}$$

1.4 R_6, damit dem aktiven Zweipol die maximale Leistung $P_{6\,\mathrm{max}}$ entnommen wird

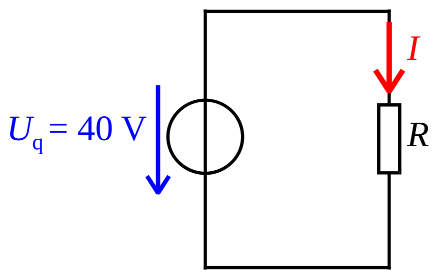
Leistungsanpassung: $R_{6\ \mathrm{Anp.}} = R_\mathrm{i} = 21\ \Omega$

1.5 Maximale Leistung $P_{6\,\mathrm{max}}$

$$P_{6\,\mathrm{max}} = \frac{U_\mathrm{L}^2}{4R_\mathrm{i}} = \frac{(1{,}5\ \mathrm{V})^2}{4 \cdot 21\ \Omega} \approx 26{,}8\ \mathrm{mW}$$

2 Unbekannter Widerstand [22]

Gegeben



$U_\mathrm{q} = 40\ \mathrm{V}$; unbekannt: I, R.
Ersetzt man R durch einen um $2\ \Omega$ kleineren Widerstand, dann I um $2{,}5\ \mathrm{A}$ größer

← **Abb. 2**: Grundstromkreis mit Quellspannung U_q und Verbraucherwiderstand R.

2.1 Widerstand R

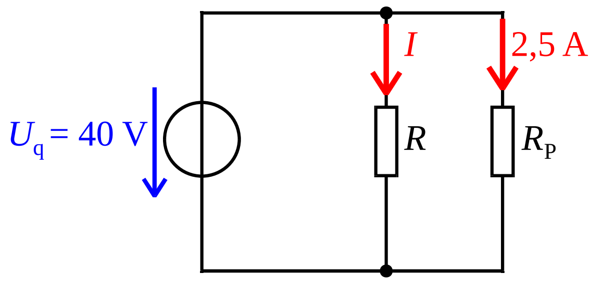
Es werden **drei alternative Rechenwege** vorgestellt

Rechenweg 1: Parallelschaltungsmodell

Verkleinern von R um $\Delta R = 2\ \Omega$ **durch Parallelschalten** von $R_\mathrm{P} = \dfrac{40\ \mathrm{V}}{2{,}5\ \mathrm{A}} = 16\ \Omega$

Forderung:

$$\frac{R R_\mathrm{P}}{R + R_\mathrm{P}} = R - \Delta R$$



Gegeben $R_\mathrm{P} = 16\ \Omega$, $\Delta R = 2\ \Omega$
Gesucht R

Lösung Berechnung des Widerstands R aus $\frac{RR_{\mathrm{P}}}{R+R_{\mathrm{P}}} = R - \Delta R$

$$\frac{RR_{\mathrm{P}}}{R+R_{\mathrm{P}}} = R - \Delta R$$ multiplizieren mit $\left(R+R_{\mathrm{P}}\right) \Rightarrow$

$$RR_{\mathrm{P}} = \left(R+R_{\mathrm{P}}\right)\left(R-\Delta R\right)$$ ausmultiplizieren $\Rightarrow$

$$RR_{\mathrm{P}} = R^2 - \Delta R \cdot R + RR_{\mathrm{P}} - \Delta R \cdot R_{\mathrm{P}}$$ zusammenfassen $\Rightarrow$

$$R^2 - \Delta R \cdot R - \Delta R \cdot R_{\mathrm{P}} = 0$$ quadratische Gleichung; Lösungen:

$$x^2 + px + q = 0\,;\; x_{1,\,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$R_{1,\,2} = \frac{\Delta R}{2} \pm \sqrt{\frac{(\Delta R)^2}{4} + \Delta R \cdot R_{\mathrm{P}}}$$ ΔR ausklammern $\Rightarrow$

$$R_{1,\,2} = \Delta R\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{R_{\mathrm{P}}}{\Delta R}}\right)$$ mit $R_{\mathrm{P}} = 16\ \Omega$ und $\Delta R = 2\ \Omega \Rightarrow$

$$R_{1,\,2} = \frac{\Delta R}{2}\left(1 \pm \sqrt{33}\right)$$ da $R > 0$, gilt das positive Vorzeichen $\Rightarrow$

$$R = \left(1+\sqrt{33}\right)\ \Omega = 6{,}7446\ \Omega \approx 6{,}74\ \Omega$$

Probe

R =	6,7445626	Ω
R||Rp =	4,7445626	Ω
Diff =	2	Ω

Rechenweg 2: Ansatzmethode für R

$$I + 2{,}5\ \mathrm{A} = \frac{U_{\mathrm{q}}}{R - 2\ \Omega} \qquad (1)$$

$$I = \frac{U_{\mathrm{q}}}{R} \qquad (2)$$

(2) in (1) einsetzen, es bleibt eine Unbekannte R: $\frac{U_{\mathrm{q}}}{R} + 2{,}5\ \mathrm{A} = \frac{U_{\mathrm{q}}}{R - 2\ \Omega}$

Lösung der Gleichung für R:

$$\frac{U_\mathrm{q}}{R-2\ \Omega}-\frac{U_\mathrm{q}}{R}=2{,}5\ \mathrm{A}$$

$$\frac{1}{R-2\ \Omega}-\frac{1}{R}=\frac{2{,}5\ \mathrm{A}}{U_\mathrm{q}}$$ mit $\frac{2{,}5\ \mathrm{A}}{U_\mathrm{q}}=\frac{1}{16\ \Omega}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{R-2\ \Omega}-\frac{1}{R}=\frac{1}{16\ \Omega}$$ mit Hauptnenner $\Rightarrow$

$$\frac{R-R+2\ \Omega}{(R-2\ \Omega)R}=\frac{1}{16\ \Omega}\quad\Rightarrow\quad\frac{2\ \Omega}{(R-2\ \Omega)R}=\frac{1}{16\ \Omega}$$ $\Rightarrow$ Quadr. Gleichung f. R:

$$R^2-2\ \Omega\cdot R-32\cdot\Omega^2=0$$

$$R_{1/2}=1\ \Omega\pm\sqrt{1\ \Omega^2+32\ \Omega^2}$$ da $R>0$, gilt das positive Vorzeichen $\Rightarrow$

$$R=\left(1+\sqrt{33}\right)\ \Omega=6{,}7446\ \Omega\approx 6{,}74\ \Omega$$

Rechenweg 3: Ansatzmethode für I

$$\frac{U_\mathrm{q}}{I}-2\ \Omega=\frac{U_\mathrm{q}}{(I+2{,}5\ \mathrm{A})}$$ U_q-Terme auf die linke Seite und U_q ausklammern:

$$\frac{U_\mathrm{q}}{I}-\frac{U_\mathrm{q}}{(I+2{,}5\ \mathrm{A})}-2\ \Omega=0$$

$$U_\mathrm{q}\left[\frac{1}{I}-\frac{1}{(I+2{,}5\ \mathrm{A})}\right]-2\ \Omega=0$$ Hauptnenner bilden

$$U_\mathrm{q}\left[\frac{I+2{,}5\ \mathrm{A}-I}{I(I+2{,}5\ \mathrm{A})}\right]-2\ \Omega=0$$

$$\frac{U_\mathrm{q}\cdot 2{,}5\ \mathrm{A}}{I^2+2{,}5\ \mathrm{A}\cdot I}-2\ \Omega=0$$

$$U_q \cdot 2{,}5\ \mathrm{A} - 2\ \Omega\left(I^2 + 2{,}5\ \mathrm{A} \cdot I\right) = 0$$

$$\frac{U_q \cdot 2{,}5\ \mathrm{A}}{-2\ \Omega} + I^2 + 2{,}5\ \mathrm{A} \cdot I = 0$$ mit $\frac{2{,}5}{2} = \frac{5}{4}$ und $2{,}5 = \frac{5}{2}$ $\Rightarrow$

$$I^2 + \frac{5}{2}\ \mathrm{A} \cdot I - \frac{5}{4} U_q \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{V}} = 0$$

$$I^2 + \frac{5}{2}\ \mathrm{A} \cdot I - 50\ \mathrm{A}^2 = 0$$ $\Rightarrow$ Quadratische Gleichung für I:

$$\frac{I_{1/2}}{\mathrm{A}} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + 50} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25+800}{16}} = -\frac{1}{4}\left(5 \pm \sqrt{825}\right)$$

$$\frac{I_{1/2}}{\mathrm{A}} = \frac{-5 \pm 28{,}72}{4}$$ da $I > 0$, gilt das positive Vorzeichen $\Rightarrow$

$$I = 5{,}9307\ \mathrm{A}$$

Ergebnis:

$$R = \frac{U_q}{I} = \frac{40\ \mathrm{V}}{5{,}9307\ \mathrm{A}} = 6{,}7446\ \Omega$$

2.2 Strom I durch R

$$I = \frac{U_q}{R} = \frac{40\ \mathrm{V}}{6{,}7446\ \Omega} = 5{,}9307\ \mathrm{A} \approx 5{,}93\ \mathrm{A}$$

3 Messbereichserweiterung bei Strommessung [12]

Gegeben Strommesser $I_N = 10\ \mathrm{A}$, $U_N = 10\ \mathrm{V}$

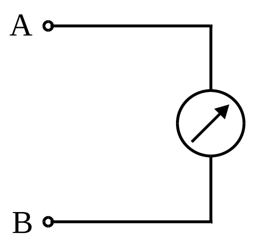


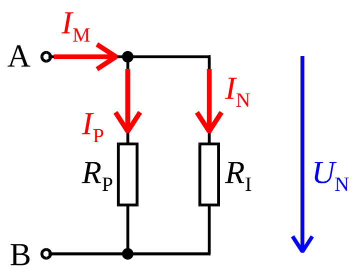
Abb. 3: Strommesser mit Nennwert
I_N = Vollausschlag des Instruments

3.1 Innenwiderstand des Strommessers R_I

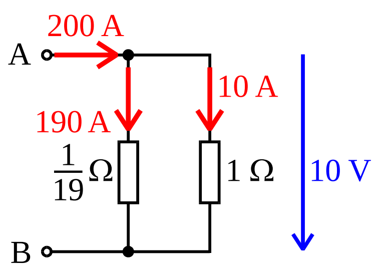
$$R_I = \frac{U_N}{I_N} = \frac{10\ \mathrm{V}}{10\ \mathrm{A}} = 1\ \Omega$$

3.2 Messschaltung $I_M = 200\ \mathrm{A}$

Ein parallel zum Instrument angeordneter Widerstand R_P vergrößert den Strommessbereich von $10\ \mathrm{A}$ auf $I_M = 200\ \mathrm{A}$.



$$R_P = \frac{R_I}{\frac{I_M}{I_N} - 1} = \frac{1}{19}\Omega \quad \Rightarrow$$



4 Temperaturabhängigkeit von Widerständen [26]

Gegeben Temperaturabhängiger Widerstand $R(T)$

$$T = 0^{\circ}\mathrm{C}: \quad R\left(T = 0^{\circ}\mathrm{C}\right) = 92\ \Omega$$

$$T = 20^{\circ}\mathrm{C}: \quad R\left(T = 20^{\circ}\mathrm{C}\right) = 100\ \Omega$$

4.1 Temperaturkoeffizient α_{20} des Widerstands $R(T)$

$$\alpha_{20} = \frac{1}{R_{20}} \cdot \left.\frac{\Delta R}{\Delta T}\right|_{20^{\circ}\mathrm{C}} \qquad \rightarrow \qquad \alpha_{20} = \frac{1}{100\ \Omega} \cdot \frac{8\ \Omega}{20\ \mathrm{K}} = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$$

$$R_{20} = 100\ \Omega,\ \Delta R = 8\ \Omega,.\ \Delta T = 20\ \mathrm{K}$$

4.2 Widerstandswert $R\left(T = 35^{\circ}\mathrm{C}\right)$

$$R_{35} = R_{20}\left[1 + \alpha_{20}\left(\frac{T}{{}^{\circ}\mathrm{C}} - 20\right)\mathrm{K}\right] \qquad \rightarrow \qquad R_{35} = R_{20}\left[1 + \alpha_{20}(35 - 20)\mathrm{K}\right] = 106\ \Omega$$

4.3 $\alpha_{20\ \mathrm{ers}}$ des Ersatzwiderstands der Parallelschaltung $R_{\mathrm{ers}} = R(T) \| R_{\mathrm{P}}$ mit $R_{\mathrm{P}} = 50\ \Omega$

$$T = 0^{\circ}\mathrm{C}: \quad R_{0\ \mathrm{ers}}\left(T = 0^{\circ}\mathrm{C}\right) = R\left(T = 0^{\circ}\mathrm{C}\right) \| R_{\mathrm{P}} = 92\ \Omega \| 50\ \Omega = 32{,}394\ \Omega$$

$$T = 20^{\circ}\mathrm{C}: \quad R_{20\ \mathrm{ers}}\left(T = 20^{\circ}\mathrm{C}\right) = R\left(T = 20^{\circ}\mathrm{C}\right) \| R_{\mathrm{P}} = 100\ \Omega \| 50\ \Omega = 33{,}\bar{3}\ldots\ \Omega$$

$0^{\circ} \ldots\ 20^{\circ}$

$$\alpha_{20\ \mathrm{ers}} = \frac{1}{R_{20\ \mathrm{ers}}} \cdot \left.\frac{\Delta R}{\Delta T}\right|_{20^{\circ}\mathrm{C}}$$

$$\alpha_{20\ \mathrm{ers}} = \frac{1}{33{,}33\ \Omega} \cdot \frac{(33{,}33 - 32{,}39)\ \Omega}{20\ \mathrm{K}}$$

$$\alpha_{20\ \mathrm{ers}} = 1{,}41 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$$

Es ist auch möglich, $\alpha_{20\ \mathrm{ers}}$ im Temperaturbereich $20^{\mathrm{o}}...35^{\mathrm{o}}$ zu berechnen:

$$20^{\mathrm{o}}...35^{\mathrm{o}} \qquad \alpha_{20\ \mathrm{ers}} = \frac{1}{R_{20\ \mathrm{ers}}} \cdot \left.\frac{\Delta R}{\Delta T}\right|_{20^{\mathrm{o}}\,\mathrm{C}}$$

$$\alpha_{20\ \mathrm{ers}} = \frac{1}{33{,}33\ \Omega} \cdot \frac{(33{,}97 - 33{,}33)\ \Omega}{15\ \mathrm{K}} = 1{,}28 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$$

oder

$$\alpha_{20\ \mathrm{ers}} = \frac{1}{33{,}33\ \Omega} \cdot \frac{(34{,}04 - 33{,}33)\ \Omega}{15\ \mathrm{K}} = 1{,}42 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$$

Die Abweichung zu den Ergebnissen der Berechnung bei $0^{\mathrm{o}}...20^{\mathrm{o}}$ wird durch die Verwendung des TKs des Widerstands und nicht des TKs des Leitwertes verursacht. Für technische Aspekte ist die Abweichung gering. Je kleiner der Temperaturbereich ΔT, desto geringer die Abweichung (hier liegen relativ große ΔT vor).

Der Ersatzwiderstand der Parallelschaltung kann ***näherungsweise*** auch ***allgemein*** berechnet werden (siehe Seite **10**).

4.4 Ersatzwiderstand $R_{\mathrm{ers}}\left(T = 35^{\mathrm{o}}\mathrm{C}\right)$ der Parallelschaltung $R(T) \| (R_{\mathrm{P}} = 50\ \Omega)$

Berechnung mit $\alpha_{20\ \mathrm{ers}} = 1{,}41 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$ von Aufgabe **4.3**:

$$T = 35^{\mathrm{o}}\mathrm{C}: \quad R_{\mathrm{ers}}(T) = R_{20\ \mathrm{ers}}\left[1 + \alpha_{20\ \mathrm{ers}}\left(\frac{T}{{}^{\circ}\mathrm{C}} - 20\right)\mathrm{K}\right]$$

$$R_{35\ \mathrm{ers}} = R_{20\ \mathrm{ers}}\left(1 + \alpha_{20\ \mathrm{ers}} \cdot 15\ \mathrm{K}\right) = 34{,}04\ \Omega \approx 34\ \Omega$$

Berechnung mit $R_{35} = 106\ \Omega$ von Aufgabe **4.2**:

$$T = 35^{\mathrm{o}}\mathrm{C}: \quad R_{35\ \mathrm{ers}}\left(T = 35^{\mathrm{o}}\mathrm{C}\right) \quad = R\left(T = 35^{\mathrm{o}}\mathrm{C}\right) \| R_{\mathrm{P}}$$

$$R_{35\ \mathrm{ers}} = 106\ \Omega \| 50\ \Omega = 33{,}97\ \Omega \approx 34\ \Omega$$

Näherungsweise kann man auch ***allgemein*** einen TK des Ersatzwiderstands bestimmen:

$$R_{ers} = \frac{R_{20} R_p (1+\alpha_{20}\Delta T)}{R_p + R_{20}(1+\alpha_{20}\Delta T)} = \frac{R_{20} R_p (1+\alpha_{20}\Delta T)}{R_{20}\left[R_p/R_{20} + 1 + \alpha_{20}\Delta T\right]}$$

$\uparrow$ ΔT im Nenner!

$$= \frac{R_p (1+\alpha_{20}\Delta T)}{\left(\frac{R_p}{R_{20}}+1\right)\left[1+\underbrace{\frac{\alpha_{20}}{\left(\frac{R_p}{R_{20}}+1\right)}}_{=\alpha_{20}'}\Delta T\right]} = \frac{R_p}{\left(\frac{R_p}{R_{20}}+1\right)} \cdot \frac{1+\alpha_{20}\Delta T}{1+\alpha_{20}'\Delta T}$$

Für $|x| \ll 1$ gilt in guter Näherung: $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$

$$\approx \frac{R_p R_{20}}{R_p + R_{20}} (1+\alpha_{20}\Delta T)(1-\alpha_{20}'\Delta T)$$

$$= \frac{R_p R_{20}}{R_p + R_{20}} \left[1 - \alpha_{20}'\Delta T - \alpha_{20}\Delta T - \underbrace{\cancel{\alpha_{20}\alpha_{20}'(\Delta T)^2}}_{\simeq 0}\right]$$

$$= \frac{R_p R_{20}}{R_p + R_{20}} \left[1 + \overbrace{(\alpha_{20} - \alpha_{20}')}^{\alpha_{20ers}}\Delta T\right]$$

$$R_{ers} = \underbrace{\frac{R_p R_{20}}{R_p + R_{20}}}_{R_{20ers}} (1 + \alpha_{20ers}\Delta T)$$

$$\alpha_{20ers} = \alpha_{20}\left[1 - \frac{R_{20}}{R_p + R_{20}}\right] = 1{,}\bar{3}\ldots\ ‰\,K^{-1}$$

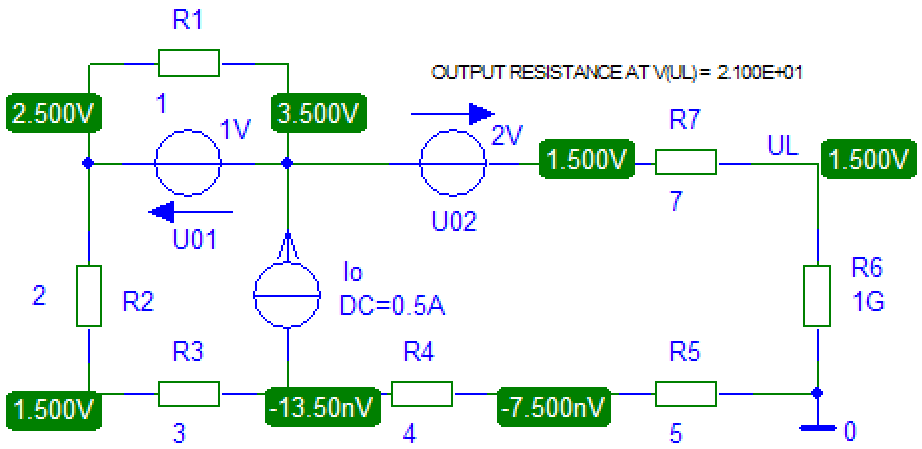
In der Klausur nicht gefordert.

Aufgabe 1: Aktiver und passiver Zweipol

Schaltungssimulation mit PSpice Studentenversion 9.1

Leerlaufspannung U_L

und Innenwiderstand R_i

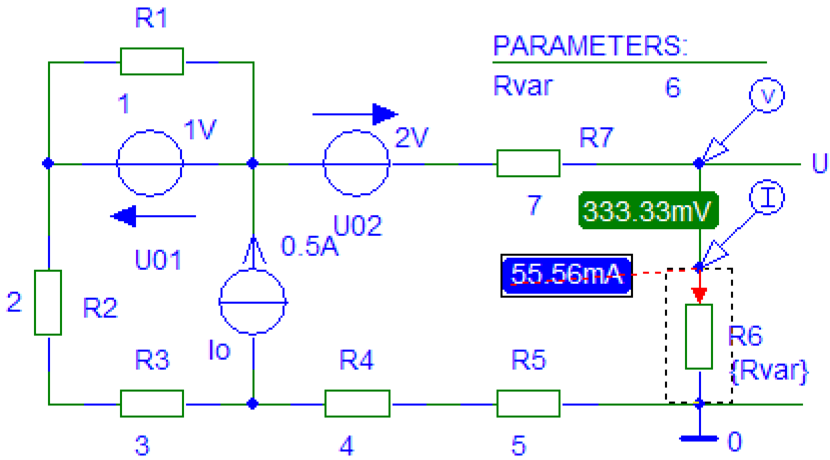


Untersuchung der

Leistungsanpassung

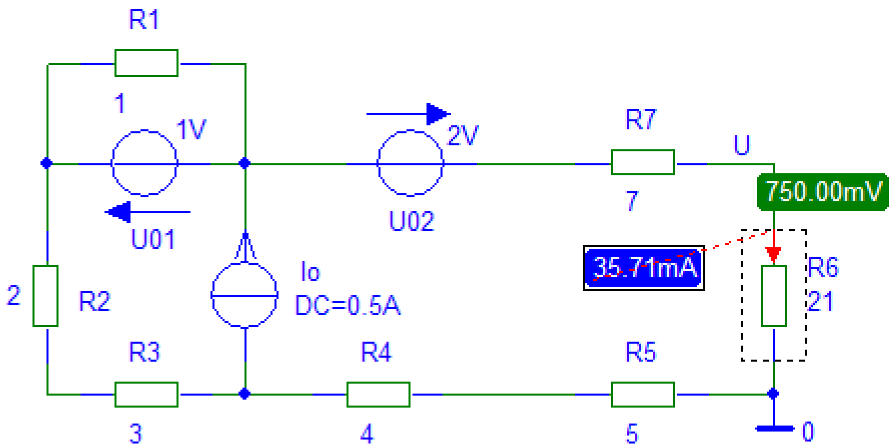
P6 = f(R6)

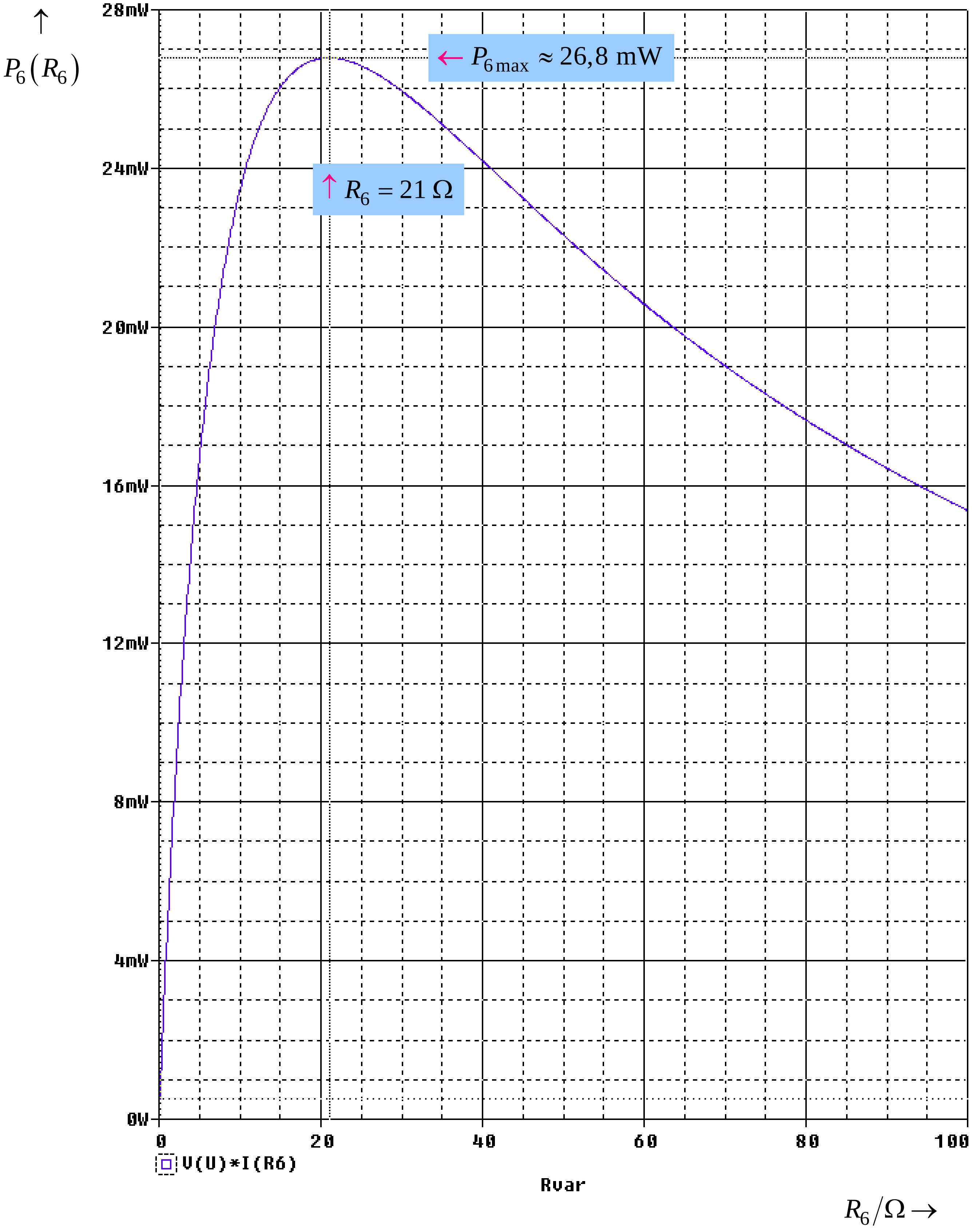
Diagramm auf Seite 10



Leistungsanpassung

R6 = Ri = 21 Ω





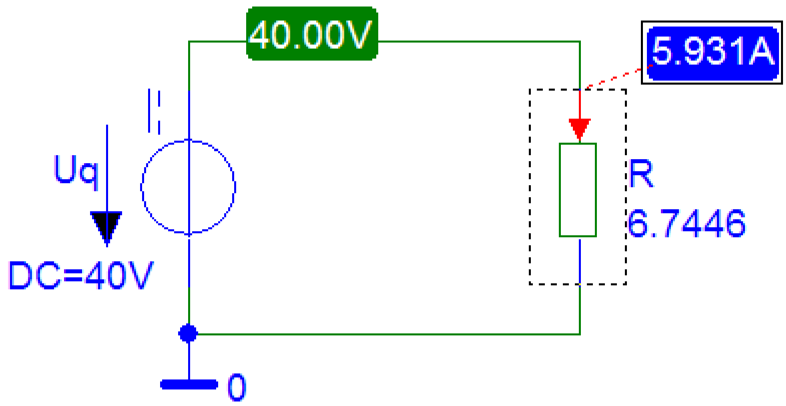
↑
$P_6(R_6)$
28mW
24mW
20mW
16mW
12mW
8mW
4mW
0W
0
20
40
60
80
100
V(U)*I(R6)
Rvar
$\leftarrow P_{6\,\max} \approx 26{,}8$ mW
$\uparrow R_6 = 21\ \Omega$
$R_6/\Omega \rightarrow$

Aufgabe 2: Unbekannter Widerstand

Schaltungssimulation mit PSpice Studentenversion 9.1

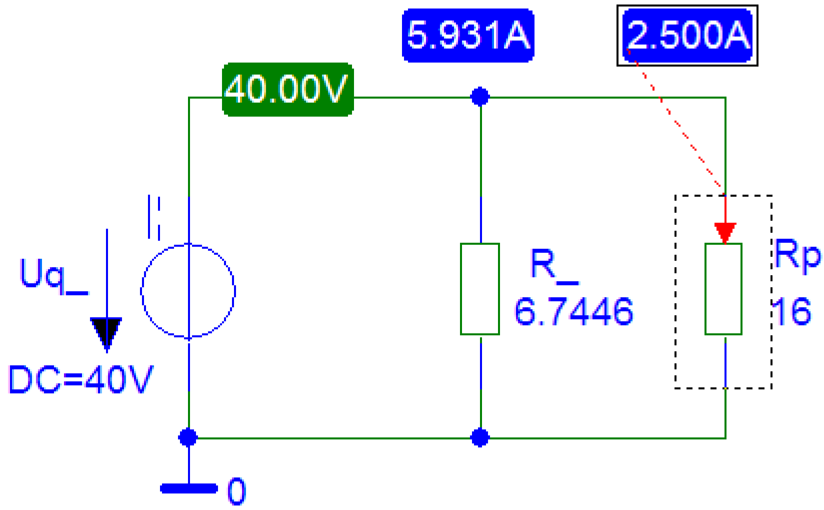
Grundstromkreis

Uq = 40 V
I
R



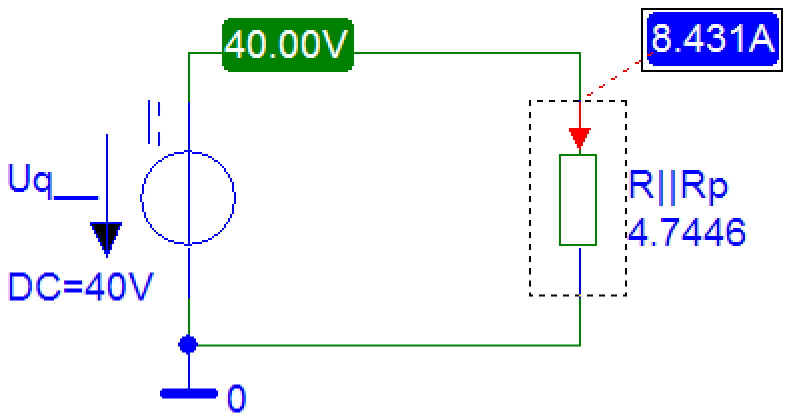
Grundstromkreis

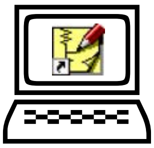
Uq = 40 V
I + 2,5 A
R || 16 Ohm



Grundstromkreis

Zusammenfassung
R || Rp und Messung des
Stromes I + 2,5 A





Aufgabe 3: Messbereichserweiterung bei Strommessung

Schaltungssimulation mit PSpice Studentenversion 9.1